

Elemente de calcul vectorial.

- Modulul 1 -

Considerăm E_3 spațiul construit cu teoria axiomatică a lui David Hilbert (1862-1943) format din 20 de axiome, grupate în 5 grupe.

În continuare vom construi o mulțime V_3 care are o structură algebrică și omulme V_3 este un spațiu vectorial 3-dimensional, și subspațiile sale V_2 și V_1 , de dim. 2, respectiv 1.

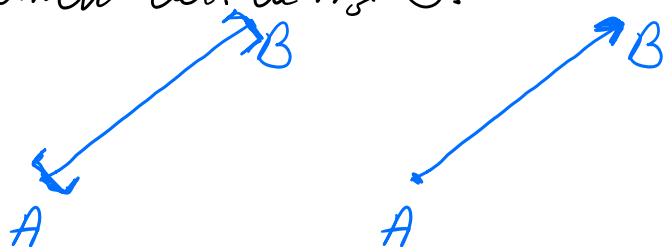
Observație. Pe E_3 nu avem definită o structură algebrică: nu putem aduna puncte, adică elemente ale lui E_3 , dar vom putea aduna vectori liberi, adică elemente ale lui V_3 .

Spațiul V_3 este foarte utilizat în Fizică, dar acolo noțiunile sunt prezentate mai mult la nivel intuitiv.

Aici vom defini în mod riguros noțiunea de vector liber, ca o omulmită clasă de echivalență, și toate operațiile cu vectori liberi.

De asemenea, V_3 este foarte util și în studiul lui E_3 deoarece rezultatele clasice (din geometria "sintetică") se pot redemonstra mai rapid cu ajutorul vectorilor.

Fie A și B două puncte din E_3 . Vom nota cu $[AB]$ segmentul det. de A și B , iar cu $\overrightarrow{AB}$ segmentul orientat det. de A și B .



Seg. $[AB]$ putem să ni-l imaginăm ca o mulțime "statică" de puncte privite în ansamblul ei, pe când seg. orientat $\overrightarrow{AB}$ putem să ni-l imaginăm ca traiectoria unui punct mobil ce pornește din A și ajunge în B (el rămânând tot timpul pe dr. AB).

Dacă $A=B$, atunci $\overrightarrow{AA}$ s.m. segment orientat nul. Un seg. orientat nul este mai dificil de reprezentat pt. că el nu trebuie confundat cu un punct.

Dacă $\overrightarrow{AB}$ este un seg. orientat, at. punctul A s.m. originea, iar punctul B s.m. extimitatea, sau vârful segmentului orientat.

Definiție. Spunem că 2 seq. orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CA}$ coincid, sau sunt egale, dacă $A=C$ și $B=D$.

Observație. Desigur, dacă $A \neq B$, at $\overline{AB} \neq \overline{BA}$, iar seq. $[AB]$ îi corespund două seq. orientate $\overline{AB}$ și $\overline{BA}$.

Multimea seq. orientate o vom nota cu $\overline{E}_3$.

Observație. În loc de segmente orientate și spațiul $\overline{E}_3$ am putea considera perechi ordonate de puncte (A,B) și mulțimea $E_3 \times E_3$, adică produsul cartezian al lui E_3 cu el însuși. Dar perechea (A,B) este un obiect abstract, care nu poate fi desenat. Avantajul selecției lui $E_3 \times E_3$ este că putem considera fără probleme perechile de forma (A,A) care corespund lui $\overline{AA}$.

Definiție. Fie $\overline{AB}$ un seq. orientat cu $A \neq B$. Dr. AB ce trece prin cele două puncte s.m. dreapta suport.

Observație. Pt seg. orientat nul $\overline{AA}$, dr. suport nu este definită.

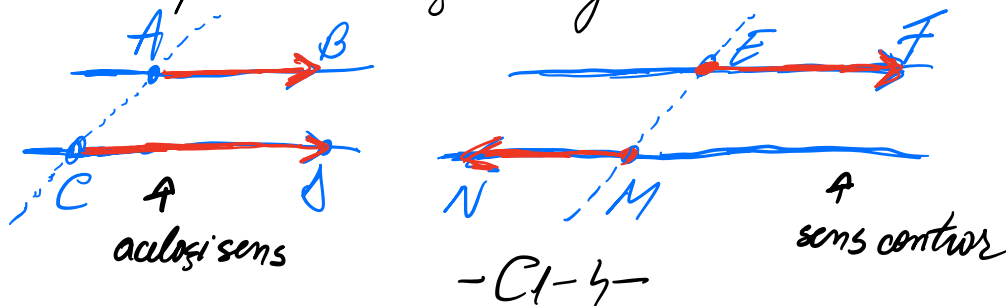
Definiție. Spunem că 2 seg. orientate au aceeași direcție dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid sau unul este seg. nul.

Definiție. Două seg. orientate care au aceeași direcție s.m. coliniare. În caz contrar, ele s.m. necoliniare.

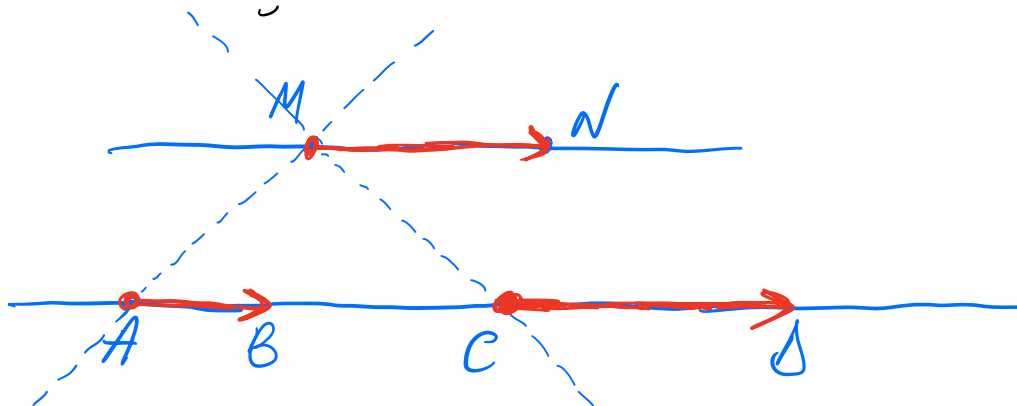
Definiție. Două seg. orientate cu aceeași direcție spunem că au aceeași sens dacă se regăsesc în una din următoarele situații:

(a) sunt nule

(b) dr. suport sunt distincte și extremitățile seg. orientate sunt în același semiplan det. de dreapta ce unește originile lor.



(c) dreptele suport coincid și există un seq. orientat cu dreapta suport paralelă cu dreptele suport initiale și care are același sens cu seq. orientate initiale.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{MN} \triangle \overline{AB} \\ \overline{MN} \triangle \overline{CD} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} \triangle \overline{CD} \text{ (transitivitate)}$$

" $\triangle$ " = același sens

Definiție Fie $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ două seq. orientate. Sp. că $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ au aceeași mărime / modul / lungime dacă distanța de la A la B este egală cu distanța de la C la D.

Notăm: $\|\overline{AB}\| = \|\overline{CD}\|$ sau $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.

Definiție: Două seg. orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ s.m. echipolente dacă $[AD]$ și $[BC]$ au același mijloc.

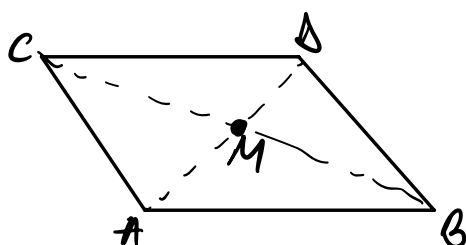
Not. $\overline{AB} \sim \overline{CD}$

Observații

1) Mijlocul seg. $[AA]$ este considerat punctul A .

2) Dacă dreptele AB și CD sunt distincte atunci $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ d.m.d.

$ABCD$ paralelogram, adică $AB \parallel CD$ ($\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ au același direcție)

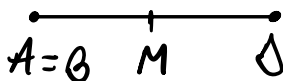


B și D sunt în același semiplan det. de AC
($\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ au același sens)
 $[AB] \equiv [CD]$ ($\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ au aceeași mărime)

3) $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ și $A=B \Leftrightarrow C=D$

$\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow [AD]$ și $[BC]$ au același mijloc $M \Leftrightarrow [BD]$ și $[AC]$ au același mijloc M
 $A=B$

$\Leftrightarrow D=C$

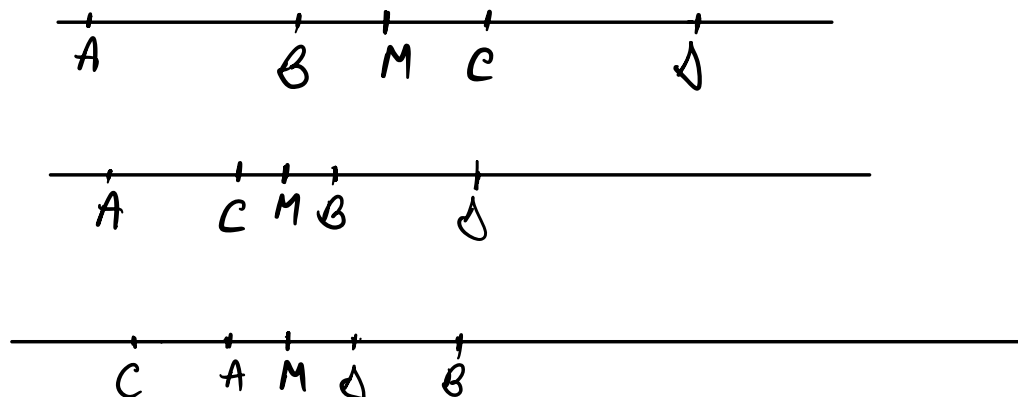


Cor. particular: $\overline{AA} \sim \overline{BB}$, $\forall A, B \in E_3$ (seg. orientat nul este în rel. de echip. doar cu seg. orientat nul)

4) $A, B, C, D \in E_3$ coliniare, distincte, at. $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow [AB] \equiv [CD]$

(adică $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ au aceeași lungime), $[AB]$ și $[CD]$ au în comun o semi-dreaptă (adică $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ au același sens) și $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ au

aceleși direcție pt. c. au aceleși dreptă suport.



$$5) \overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AC} \sim \overline{BD}$$

$$\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow [AD] \text{ și } [BC] \text{ au același mijloc} \Leftrightarrow [AD] \text{ și } [BC] \text{ au același mij.} \\ \Leftrightarrow \overline{AC} \sim \overline{BD}$$

Teorema Fie O un punct fixat din E_3 și $\overline{AB} \in \overline{E_3}$. Atunci există un unic punct $M \in E_3$ a.z. $\overline{AB} \sim \overline{OM}$.

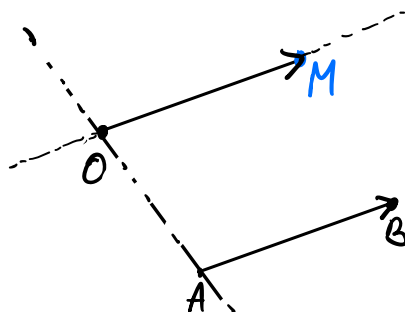
Demonstrație:

Existența: 1) Dacă $A=B \Rightarrow M=O$.

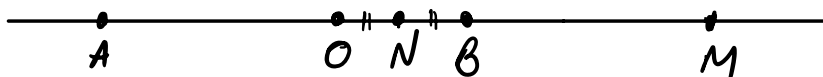
2) Fie $A \neq B$.

a) Dacă $O \notin \overline{AB}$, prin O ducem o paralelă la $d: AB$ pe care fixăm un punct M a.z. $[AB] \equiv [OM]$ și B și M să fie în același semiplan determinat de dreptă OA .

Atunci este clar că $OABM$ este paralelogram și deci $\overline{OM} \sim \overline{AB}$.



6) Dacă $O \in AB$ considerăm N mijlocul seg. $[OB]$ și M simetricul lui A față de $N \Rightarrow [AN] \equiv [NM] \Leftrightarrow N$ mijlocul seg. $[AM] \Rightarrow \Rightarrow [AM]$ și $[BO]$ au același mijloc $\Rightarrow \overline{AB} \sim \overline{OM}$.



Unicitatea: P.p. că $\exists M, M' \in \mathbb{E}_3, M \neq M'$ a.c. $\overline{AB} \sim \overline{OM}$ și $\overline{AB} \sim \overline{OM'}$.

$\overline{AB} \sim \overline{OM} \Leftrightarrow [AM]$ și $[BO]$ au același mijloc. $\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \sim \overline{OM} \\ \overline{AB} \sim \overline{OM'} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\overline{AB} \sim \overline{OM'} \Leftrightarrow [AM']$ și $[BO]$ au același mijloc

$\Rightarrow [AM]$ și $[AM']$ au același mijloc $\Leftrightarrow \overline{AA} \sim \overline{M'M} \Leftrightarrow \underline{M' = M}$ ~~#~~

Teorema. Relația de echipolență „ $\sim$ ” este o relație de echivalență pe mulțimea seg. orientate (reflexivă, simetrică, transitivă)

1) Reflexivitatea: $\overline{AB} \sim \overline{AB}$

2) Simetria: $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \sim \overline{AB}$.

3) Transitivitatea: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ și $\overline{CD} \sim \overline{EF} \Rightarrow \overline{AB} \sim \overline{EF}$

Definiție S.m. vector liber o clasă de echivalență în raport cu relația de echipolență def. pe mulțimea seg. orientate.

De obicei, vom nota un vector liber $\overline{AB}, \overline{CD}$, etc., sau cu $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, etc. Deci, de exemplu,

$$\vec{AB} = \{ \overline{CD} \in \mathbb{E}_3 \mid \overline{CD} \sim \overline{AB} \}.$$

Evident, $\vec{AB} \neq \emptyset$, deoarece $\overline{AB} \sim \overline{AB}$, adică $\overline{AB} \in \vec{AB}$

Oicei seg. orientat $\overrightarrow{CA} \in \overrightarrow{AB}$ s.m. reprezentant al vect. $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$

Ansamblul tuturor vect. liberi $\overrightarrow{AB}$ poate fi gândit ca o mulțime, numită multimea vectorilor cât a lui E_3 în raport cu "N" și notată cu V_3 , iar un vector liber va fi privit ca un element al acestei mulțimi.

Evident, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$, $\forall A, B \in E_3$, iar $\overrightarrow{AA}$ s.m. vectorul nul. Avem un unic vector nul, dar o infinitate de seg. orientate nule; notăm $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
 $\overrightarrow{AA} = \{ \overrightarrow{BB} \in E_3 \mid \overrightarrow{BB} \sim \overrightarrow{AA} \}$

Dei,

$$\underline{V_3 = \{ \overrightarrow{AB} \mid A, B \in E_3 \} = \overline{E_3} / \sim = \vec{E_3}}$$

Notăm

$$V_2 = \{ \overrightarrow{AB} \mid A, B \in \pi \} = \overline{\pi} / \sim = \vec{\pi} \quad (\pi\text{-plan})$$

$$V_1 = \{ \overrightarrow{AB} \mid A, B \in d \} = \overline{d} / \sim = \vec{d} \quad (d\text{-dreaptă})$$

Definiție Fie $\vec{AB} \in V_3 \setminus \{\vec{0}\}$. Dreptor AB împreună cu toate dreptele paralele cu AB formează direcția vectorului liber $\vec{AB}$

Definiție Fie $\vec{AB} \in V_3$. Numim lungimea / norma vect. $\vec{AB}$ lungimea seg. $[AB]$.

Not: $\|\vec{AB}\| = |\vec{AB}| = AB$

Definiție Spunem că doi vectori $\vec{AB}$ și $\vec{CD}$ au același sens (sens contrar) dacă $\vec{AB}$ și $\vec{CD}$ au același sens (sens contrar).

Observație 1) Definițiile de mai sus au caracter geometric (adică nu depind de reprezentantul ales).

2) Un vector este unic determinat de direcția, sensul și mărimea sa.

3) Vectorul nul $\vec{0}$ este singurul vector de lungime 0; convenim că vectorul nul are același direcție și același sens cu orice vector liber.

Definiție Doi sau mai mulți vectori nenuli se numesc coliniari sau paraleli dacă au același direcție.

Notăm: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Definiție Doi sau mai mulți vectori liberi nenuli sunt egali dacă sunt coliniari, au același sens și au aceeași mărime.

Definiție Trei sau mai mulți vectori nenuli d.m. coplanari dacă există un plan a.d. dreptele determinate de reprezentanții ai lor să fie paralele cu acest plan.

De asemenea, mai spunem că $\vec{AB}$ este perpendicular, sau paralel, cu un plan (π) dacă $AB \perp (\pi)$ sau respectiv $AB \parallel (\pi)$ sau $ABC \subset (\pi)$

Observații

- 1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_1$, $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari
- 2) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_2$, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sunt coplanari

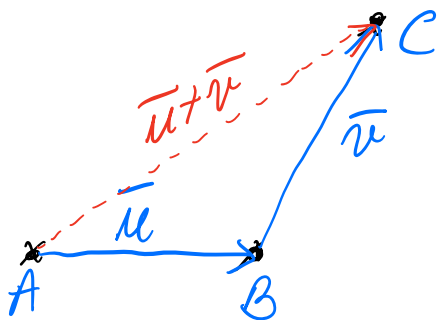
Propoziție Fie $O \in E_3$ fixat și $\vec{u} \in V_3$. At. există un unic punct $M \in E_3$ a.d. $\vec{OM} = \vec{u}$. Spunem că am aplicat vect. $\vec{u}$ în punctul O și vect. $\vec{OM}$ este vectorul de poziție al punctului M . Mai notăm $\vec{OM} = r_M$.

Operații cu vectori liberi

Pe mulțimea V_3 vom defini două operații:
adunarea vectorilor și înmulțirea dintre un
scalar și un vector.

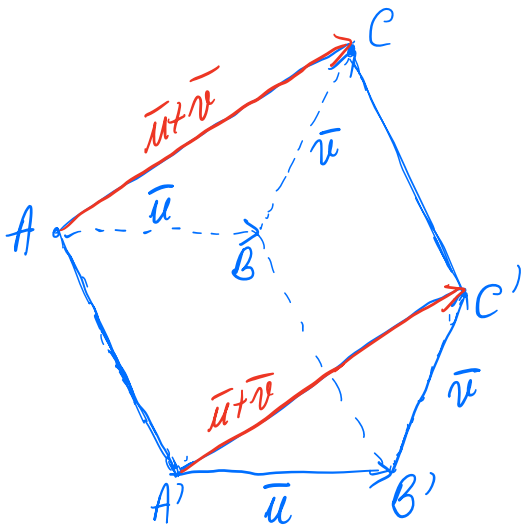
Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$. Dorim să definim $\vec{u} + \vec{v}$.
Pentru aceasta, fie $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Definim

$\vec{u} + \vec{v} := \overrightarrow{AC}$ (regula triunghiului)
sau regula lui Chasles



Def. are caracter geometric.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \\ \vec{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{\underline{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}}}$$



A dem. că $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} \Leftrightarrow \overline{AC} \sim \overline{A'C'}$

Știm că

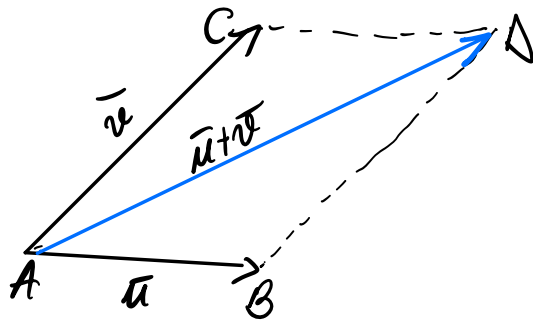
$$\left. \begin{aligned} \overline{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} &\Leftrightarrow \overline{AB} \sim \overline{A'B'} \Leftrightarrow \overline{AA'} \sim \overline{BB'} \\ \overline{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} &\Leftrightarrow \overline{BC} \sim \overline{B'C'} \Leftrightarrow \overline{BB'} \sim \overline{CC'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

transitivitate

$$\Rightarrow \overline{AA'} \sim \overline{CC'} \Leftrightarrow \overline{AC} \sim \overline{A'C'}$$

Adunarea a doi vectori se poate defini și cu ajutorul reguli paralelogramului în modul următor:

Fie $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overline{v} = \overrightarrow{AC}$ (considerăm vectorii cu aceeași origine) și definim $\overline{u+v} := \overrightarrow{AD}$, unde $\Delta \in \mathcal{E}_3$ a.t. $ABCD$ paralelogram.



T.A. Arătați că def. are caracter geometric.

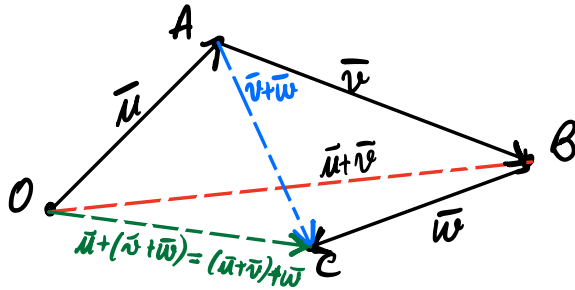
Teorema: $(V_3, +)$ este grup abelian.

Demonstratie:

(G1) Asociativitatea: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

Fie $O, A, B, C \in E_3$ a.i. $\vec{u} = \vec{OA}$, $\vec{v} = \vec{AB}$, $\vec{w} = \vec{BC}$

$$\left. \begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= (\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC} \\ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{q.e.d.}$$



(G2) Elem. neutru: $\forall \vec{u} \in V_3, \exists \vec{0} \in V_3$ a.i. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

Fie $A, B \in E_3$ a.i. $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{BB}$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} + \vec{0} &= \vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB} \\ \vec{0} + \vec{u} &= \vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{q.e.d.}$$

(G3) Elem. opus (simetricabil): $\forall \vec{u} \in V_3, \exists (-\vec{u}) \in V_3$ a.i. $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$

Fie $A, B \in E_3$ a.i. $\vec{u} = \vec{AB}$; considerăm vect. $-\vec{u} = \vec{BA}$

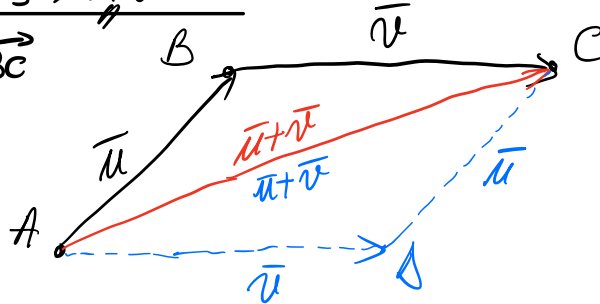
$$\left. \begin{aligned} \vec{u} + (-\vec{u}) &= \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0} \\ -\vec{u} + \vec{u} &= \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{BB} = \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{q.e.d.}$$

(64) Comutativitatea: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3 \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Fie $A, B, C \in E_3$ a.r. $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{BC}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{BC} + \vec{AB} = ?$$



Fie $\Delta \in E_3$ a.r. $\vec{v} = \vec{AD} \Rightarrow ABCD$ - paralelogram
 $\Rightarrow \vec{u} = \vec{DC}$.

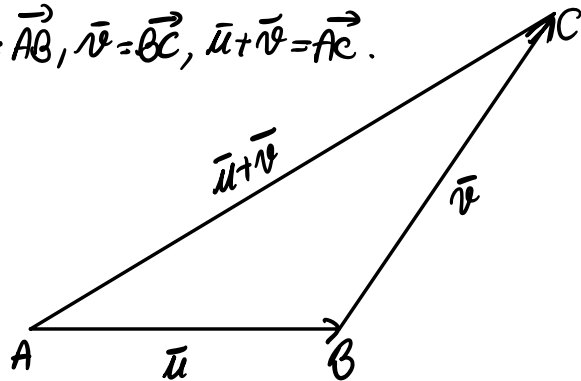
Deci $\vec{v} + \vec{u} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}$. Prin urmare, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Propoziție. Pentru orice 2 vectori $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ avem $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$, egalitate având loc d.m.d. $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari și au același sens.

Demonstrație: Fie $A, B, C \in E_3$ a.r. $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{BC}$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$.

Ipoteza: $\vec{u} = \vec{AB}$
 $\vec{v} = \vec{BC}$

Concluzie: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$

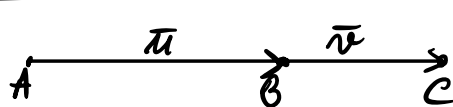


○ Pp. că $\vec{u} \nparallel \vec{v}$. Atunci

A, B, C formează un Δ și se știe că lungimea unei laturi a unui Δ este mai mică decât suma lungimilor celorlalte 2 laturi. Deci $|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|$

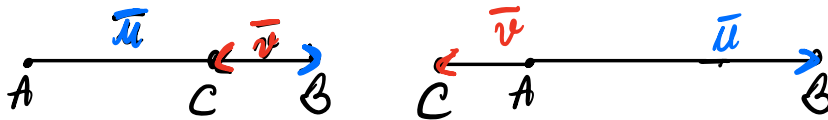
○ Pp. că $\vec{u} \parallel \vec{v}$. Atunci, punctele A, B, C sunt coliniare. Putem considera mai departe 2 cazuri:

□ $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au același sens



Este clar că $|\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v}|$.

□ $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au sensuri opuse



$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$$

$\Downarrow$

$$|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}|$$

$\Downarrow$

$$\underline{|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$$

$\Downarrow$

$$|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{BC}|$$

$\Downarrow$

$$\underline{|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{v}| + |\vec{u}|}$$

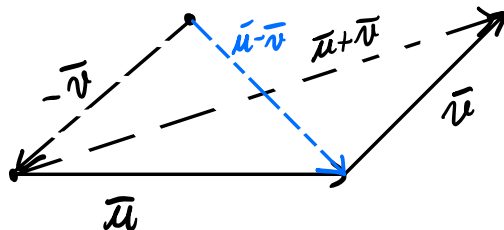
■

Propoziție P. orice vectori $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_3$ avem $||\vec{u}| - |\vec{v}|| \leq |\vec{u} + \vec{v}|$, egalitate având loc d.m.d. $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari și de sens opus.

Demonstrație (T.A.)

Observație. Existența vectorului opus ne permite să definim diferența a doi vectori în modul următor.

$$\underline{\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})}$$



Observație : $\forall A, B, C \in \mathcal{E}_3 : \vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$
-C1-16

Fie $\bar{u} \in V_3$ și $a \in \mathbb{R}$. Deim să definim $a\bar{u}$. Pt aceasta vom ține cont că un vector nenul este unic determinat de direcție, sens și mărime.

Definim

$$a\bar{u} = \begin{cases} \bar{0}, & \text{dacă } a=0 \text{ sau } \bar{u}=\bar{0} \\ \bar{v}, & \text{dacă } a \neq 0 \text{ și } \bar{u} \neq \bar{0}, \text{ unde } \bar{v} \text{ are} \\ & \text{aceeași direcție ca } \bar{u}; \bar{v} \text{ are același sens cu } \bar{u} \\ & \text{dacă } a > 0 \text{ și sens opus lui } \bar{u} \text{ dacă } a < 0; \\ & \text{lungimea lui } \bar{v} \text{ este } |\bar{v}| = |a| \cdot |\bar{u}|. \end{cases}$$

Pele 2 definiții pt. "+" și "." se aplică și în cazul lui V_2 și V_1 .

Teorema $(V_3, +, \cdot)$ este un spațiu vectorial real.

Demonstrație: Am văzut deja că $(V_3, +)$ este grup abelian.

Se poate demonstra și faptul că urm. prop. sunt satisfăcute:

- 1) $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V_3, \forall a \in \mathbb{R}: a(\bar{u} + \bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$
- 2) $\forall \bar{u} \in V_3, \forall a, b \in \mathbb{R}: (a \cdot b) \cdot \bar{u} = a \cdot (b \cdot \bar{u})$
- 3) $\forall \bar{u} \in V_3, \forall a, b \in \mathbb{R}: (a+b) \cdot \bar{u} = a\bar{u} + b\bar{u}$
- 4) $\forall \bar{u} \in V_3, 1 \cdot \bar{u} = \bar{u} \cdot 1 = \bar{u}$

(1 este identitatea lui $\mathbb{R}$ în raport cu înmulțirea).

Observatii:

- 1) Se dem. că $(V_1, +, \cdot)$ și $(V_2, +, \cdot)$ sunt sp. vectoriale reale.
- 2) Dacă $\bar{u}, \bar{v} \in V_3$, $\bar{u} \parallel \bar{v}$ d.m.d. $\exists a \in \mathbb{R}$ a.t. $\bar{u} = a \cdot \bar{v}$.
- 3) Dacă $\bar{u}, \bar{v} \in V_3$, at. $\bar{u} \parallel \bar{v}$ și $|\bar{u}| = 1$ d.m.d. $\bar{u} = \pm \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$

Subspații liniare în $(V_3, +, \cdot)$

Definiție. Fie $(V, +, \cdot)$ un K -sp. vect. și $V_1 \subseteq V$, $V_1 \neq \emptyset$. At.
 V_1 are o structură de subspațiu vect. al lui $(V, +, \cdot)$
 dacă restricțiile operațiilor $+$ și $\cdot$ la V_1 determină
 pe această mulțime o structură de K -sp. vectorial.

Teoremă. V_1 este subsp. vect. al lui V d.m.d.

- (i) $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V_1, \bar{u} + \bar{v} \in V_1$
- (ii) $\forall \bar{u} \in V_1, \forall a \in K, a\bar{u} \in V_1$

Not. $V_1 \subseteq_{\text{lin.}} V$

Fie δ o dreaptă din E_3 și π un plan din E_3 .

Definiție Spunem că $\bar{u} \in V_3$ este paralel cu dreapta δ și notăm
 $\bar{u} \parallel \delta$ dacă $\bar{u} = \vec{0}$ sau $\exists P, Q \in E_3$ aș. $\bar{u} = \vec{PQ}$ și $PQ \parallel \delta$

Definiție Spunem că $\bar{u} \in V_3$ este paralel cu planul π și
 notăm $\bar{u} \parallel \pi$ dacă $\bar{u} = \vec{0}$ sau $\exists P, Q \in E_3$ aș. $\bar{u} = \vec{PQ}$ și
 $PQ \parallel \pi$ sau $PQ \subset \pi$.

Deci

$$\left. \begin{aligned} V_1 = \delta &= \{ \vec{AB} \mid A, B \in \delta \} \\ &= \{ \bar{u} \in V_3 \mid \bar{u} \parallel \delta \} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} V_2 = \pi &= \{ \vec{AB} \mid A, B \in \pi \} \\ &= \{ \bar{u} \in V_3 \mid \bar{u} \parallel \pi \} \end{aligned} \right.$$

Propoziție Fie d o dreaptă din E_3 și π un plan din E_3 .

Atunci

$$\vec{d} \subset_{\Delta, V} V_3 \text{ și } \vec{\pi} \subset_{\Delta, V} V_3 \text{ (sunt subspații vct.)}$$

Demonstrație

$$1) \vec{d} \subset_{\Delta, V} V_3$$

Pentru demonstrație vom folosi teorema amintită mai sus, deci vom arăta:

$$A) \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{d} : \vec{u} + \vec{v} \in \vec{d}$$

$$B) \forall \vec{u} \in \vec{d}, \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot \vec{u} \in \vec{d}$$

Demonstrăm A)

Fie $O, A, B \in V_3$ aî. $\vec{u} = \vec{OA}$, $\vec{v} = \vec{AB}$. Atunci, cum $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{d}$, rez. că $OA \parallel d$ și $AB \parallel d$ rezultă că $OA \parallel AB$ sau $OA = AB$.

Cum cele 2 drepte au în comun punctul A , rez. că $OA = AB$. Deci punctele

O, A, B sunt coliniare și prin urmare $OB \parallel d$. $\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \vec{d}$

$$\text{Dar, } \vec{u} + \vec{v} = \vec{OB}$$

Demonstrăm B)

Fie $O, A, B \in E_3$ aî. $\vec{u} = \vec{OA}$ și $a\vec{u} = \vec{OB}$. Cum $\vec{u} \in \vec{d}$, rez. că $OA \parallel d$. Pe de altă parte știm că $\vec{u} \parallel a\vec{u}$, adică $\vec{OA} \parallel \vec{OB}$.
Deci $\vec{OB} \parallel d$, adică $\vec{OB} \in \vec{d}$.

$$2) \vec{\pi} \subset_{\Delta, V} V_3 \text{ (T.A.)}$$

Definiții • $\vec{\delta}$ s.m. spațiul vectorial director pt. dr. δ
sau dreapta vectorială corp lui δ
• $\vec{\pi}$ s.m. spațiul vectorial director pt. planul π
sau planul vectorial corp lui π .

Observație 1) Doi sau mai mulți vectori liberi din V_3 sunt coliniari dacă aparțin aceluși drept vectoriale.

2) Trei sau mai mulți vectori liberi din V_3 sunt coplanari dacă aparțin aceluși plan vectorial.

Schimbări de bază într-un spațiu vectorial limit dimensional.

Definiție Un sistem de vectori $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ dintr-un spațiu vectorial V s.m. liniar independent dacă oricare ar fi o combinație liniară $a^1\bar{u}_1 + a^2\bar{u}_2 + \dots + a^m\bar{u}_m = \bar{0}$, cu $a^i \in \mathbb{R}$, $i=1, m$, atunci $a^1 = a^2 = \dots = a^m = 0$.

Definiție Un sistem de vectori $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ dintr-un spațiu vectorial V s.m. liniar dependent dacă există o combinație liniară $a^1\bar{u}_1 + a^2\bar{u}_2 + \dots + a^m\bar{u}_m = \bar{0}$ cu scalarii $a^i \in \mathbb{R}$, $i=1, m$ nu toți nuli $(a^1)^2 + (a^2)^2 + \dots + (a^m)^2 > 0$

Definiție. Un sistem de vectori S se numește bază a unui spațiu vectorial V dacă S este un sistem de vectori liniar independenți și S este un sistem de generatori (adică fiecare vector din V se scrie ca o combinație liniară de vectorii din V).

Definiție. Se numește dimensiune a unui sp. vectorial numărul de vectori dintr-o bază a spațiului respectiv.

Propoziție. Dacă V_m este un spațiu vectorial m -dimensional și $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ este o bază în V_m , atunci $\forall \bar{v} \in V_m, \exists! x^i \in \mathbb{R}, i=\overline{1,m}$
a.î. $\bar{v} = \sum_{i=1}^m x^i \bar{e}_i$.

Demonstrație: ^{$i=1$} Existența ne este arătată de faptul că $\{\bar{e}_i\}_{i=1,m}$ este sistem de generatori

Unicitatea. Pp. că $\exists x^i, y^i \in \mathbb{R}, i=\overline{1,m}$ a.î.

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^m x^i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^m y^i \bar{e}_i. \text{ Atunci, } \sum_{i=1}^m (x^i - y^i) \bar{e}_i = \bar{0}. \text{ Cum}$$

$\{\bar{e}_i\}_{i=1,m}$ l. indep., rez. că $x^i - y^i = 0, \forall i=\overline{1,m} \Rightarrow x^i = y^i, \forall i=\overline{1,m}$. $\square$

Observație Putem rescrie $\bar{v} = \sum_{i=1}^m x^i \bar{e}_i$ și sub formă matriceală

$$\bar{v} = (\underbrace{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_m}_{= B \in M_{1 \times m}(\mathbb{R}^m)}) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{II}}{=} \underbrace{M_B(\bar{v})}_{= M_B(\bar{v}) \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\bar{v} = B \cdot M_B(\bar{v})}$$

$M_B(\bar{v})$ = matricea asociată lui $\bar{v}$ în raport cu baza B

În continuare vom să rezolvăm urm. probleme:

I) Problema:

Considerăm $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ o bază din V_m și $S = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\}$ un sist. format din k vectori din V_m . Vom să determinăm câți vectori din S sunt liniar independenți.

Pentru a rezolva această problemă vom considera urm. etape:

1) Expunăm vectorii din S în raport cu vectorii din baza B :

$$\bar{u}_j = B \cdot M_B(\bar{u}_j), \text{ unde } B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_m) \in \mathcal{M}_{1 \times m}(\mathbb{R}^m)$$

$$\textcircled{1} \quad \bar{u}_j = \sum_{i=1}^m s_j^i \bar{e}_i \quad M_B(\bar{u}_j) = \begin{pmatrix} s_j^1 \\ s_j^2 \\ \vdots \\ s_j^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R}), j = \overline{1, k}$$

2) Considerăm matricea obținută din coordonatele (s_j^i) de mai sus, adică formată din coordonatele vectorilor $\bar{u}_j$ în raport cu baza B , pune pe coloane

$$M_{B,S} = (M_B(\bar{u}_1) \ M_B(\bar{u}_2) \ \dots \ M_B(\bar{u}_k)) \Leftrightarrow$$

$$M_{B,S} = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_k^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots & s_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^m & s_2^m & \dots & s_k^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times k}(\mathbb{R}) \cdot (B \xrightarrow{M_{B,S}} S)$$

3) Se calculează rangul lui $M_{B,S}$, iar rangul obținut va fi numărul de vectori liniari independenți din S .

Mai puțin, dacă:

$$\begin{aligned} a^1 \bar{u}_1 + a^2 \bar{u}_2 + \dots + a^k \bar{u}_k &= \sum_{j=1}^k a^j \sum_{i=1}^m s_j^i \bar{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (s_j^i a^j) \bar{e}_i = \bar{0} \quad (\Rightarrow \quad \{\bar{e}_i\}_{i=1}^m \text{ bază} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^k s_j^i a^j = 0, \forall i = \overline{1, m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_k^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots & s_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^m & s_2^m & \dots & s_k^m \end{pmatrix}_{m \times k} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^k \end{pmatrix}_{k \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

$$\Leftrightarrow M_{B,S} \cdot A = O, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k \times 1}(\mathbb{R}), \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$$

Obs 1) Vectorii $\{\bar{u}_i\}_{i=1}^k$ sunt l. indep. $\Leftrightarrow$ sistemul omogen $M_{B,S} \cdot A = O$

are doar soluția trivială, i.e.

$$a^i = 0, \forall i = \overline{1, k}$$

2) Rangul matricii $M_{B,S}$ reprezintă dimensiunea spațiului generat de vectorii $\{\bar{u}_i\}_{i=1}^k$, adică reprezintă numărul vectorilor liniari indep. din sist. de vectori $\{\bar{u}_i\}_{i=1}^k$.

Observație. Dacă $k=m$, atunci S este o bază în V_m d.m.d. $\det M_{B,S} \neq 0$.
(adică $M_{B,S}$ are rang maxim, adică $M_{B,S}$ este inversabilă).

Problemă II

Considerăm $B_1 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$, $B_2 = \{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_m\}$, $B_3 = \{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m\}$
trei baze din V_m . Vom să demonstrăm că

$$M_{B_1, B_3} = M_{B_1, B_2} \cdot M_{B_2, B_3}$$

Notăm $M_{B_1, B_3} = (a_j^i)_{i,j=1,\overline{m}}$; $M_{B_1, B_2} = (b_j^i)_{i,j=1,\overline{m}}$; $M_{B_2, B_3} = (c_j^i)_{i,j=1,\overline{m}}$

Cu aceste notații obținem:

$$\bar{g}_j = \sum_{i=1}^m a_j^i \bar{e}_i, \quad \forall j=1,\overline{m}$$

$$\bar{k}_\ell = \sum_{i=1}^m b_\ell^i \bar{e}_i, \quad \forall \ell=1,\overline{m}$$

$$\bar{g}_j = \sum_{\ell=1}^m c_j^\ell \bar{k}_\ell, \quad \forall j=1,\overline{m}$$

$$\Rightarrow \bar{g}_j = \sum_{\ell=1}^m c_j^\ell \left(\sum_{i=1}^m b_\ell^i \bar{e}_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{\ell=1}^m b_\ell^i \cdot c_j^\ell \right) \bar{e}_i$$

Pe de altă parte, noi avem și $\bar{q}_j = \sum_{i=1}^m a_j^i \bar{e}_i$, iar cum scrierea unui vector într-o bază este unică, obținem că:

$$a_j^i = \sum_{\substack{\text{indice de linie} \\ l=1}}^m \underset{\substack{\text{indice de coloană.} \\ l}}{b_l^i} \cdot \underset{\substack{\text{indice de linie} \\ j}}{c_j^l}, \quad \forall i, j = \overline{1, m} \quad (\Rightarrow) \quad \underline{M_{B_1, B_3} = M_{B_1, B_2} \cdot M_{B_2, B_3}}$$

$$\begin{array}{c} B_1 \xrightarrow{M_{B_1, B_2}} B_2 \xrightarrow{M_{B_2, B_3}} B_3 \\ \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\ M_{B_1, B_3} = M_{B_1, B_2} \cdot M_{B_2, B_3} \end{array}$$

Observații

1) Dacă $B_3 = B_1$, obținem:

$$\begin{array}{l} M_{B_1, B_1} = M_{B_1, B_2} \cdot M_{B_2, B_1} \\ \quad \quad \quad = I_m \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} M_{B_1, B_1} = M_{B_1, B_2} \cdot M_{B_2, B_1} \\ \quad \quad \quad = I_m \end{array}} \right\} \Rightarrow \underline{M_{B_2, B_1} = (M_{B_1, B_2})^{-1}}$$

$$\begin{array}{c} B_1 \xrightarrow{M_{B_1, B_2}} B_2 \\ \xleftarrow{M_{B_2, B_1} = M_{B_1, B_2}^{-1}} \end{array}$$

2) Formal, putem scrie și în modul următor:

$$\text{Obținem } \begin{cases} B_1 = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \dots \ \bar{e}_m) \\ B_2 = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2 \ \dots \ \bar{f}_m) \\ B_3 = (\bar{g}_1 \ \bar{g}_2 \ \dots \ \bar{g}_m) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Atunci } \underline{B_3} = B_1 \cdot M_{B_1, B_3} \\ \underline{B_2} = B_1 \cdot M_{B_1, B_2} \\ \underline{B_3} = \underline{B_2} \cdot M_{B_2, B_3} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{B_3} = B_1 \cdot M_{B_1, B_2} \cdot M_{B_2, B_3} \int \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 \cdot M_{B_1, B_2} \cdot M_{B_2, B_3} = B_1 \cdot M_{B_1, B_3}$$

B_1 ~~com~~

$$\Rightarrow \underline{M_{B_1, B_2} \cdot M_{B_2, B_3} = M_{B_1, B_3}}$$

Definiție. Fie B și B' două baze din V_n . Spunem că B și B' sunt la fel orientate și not $B \circ B'$, dacă $\det M_{B, B'} > 0$, și spunem că B și B' sunt contror orientate și not $\underline{B \circ B'}$ dacă $\det M_{B, B'} < 0$.

Observație. Se poate arăta că rel " $\circ$ " este o rel de echivalență pe mulțimea bazelor din V_n și mai mult, ea permite împărțirea acestei mulțimi în 2 clase disjuncte, nuvide cu proprietatea că baze din aceeași clasă sunt la fel orientate, iar baze din clase diferite sunt contror orientate.

Orientarea lui V_n constă în alegerea uneia din cele 2 clase ca fiind clasa bazelor orientate pozitive.

V_n împreună cu o orientare a sa se numește spațiu vectorial n -dim. orientat.

Schimbare dintre două baze la fel orientate s.m. de specia I sau rotatie, iar dintre 2 baze contror orientate s.m.

de specie a II-a

Problemă III

Formula schimbării de coordonate la schimbarea de bază

Fie B_1 și B_2 două baze din V_m și $S = M_{B_1, B_2}$ matricea schimbării de bază de la B_1 la B_2 .

(este formată din coordonatele vectorilor din baza B_2 în raport cu vectorii din baza B_1). Fie $\bar{u} \in V_m$ un vector oarecare.

Doim să găsim o legătură între coordonatele vectorului $\bar{u}$ în raport cu B_1 și coordonatele lui $\bar{u}$ în raport cu B_2 .

$$B_1 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}; \quad B_2 = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m\}$$

$$\bar{f}_j = \sum_{i=1}^m s_j^i \bar{e}_i, \quad \forall j = \overline{1, m} \Rightarrow S = M_{B_1, B_2} = (s_j^i)_{i, j = \overline{1, m}}$$

$\exists! x^i, y^j \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}$, a.î:

$$\begin{cases} \bar{u} = \sum_{i=1}^m x^i \bar{e}_i \\ \bar{u} = \sum_{j=1}^m y^j \bar{f}_j \end{cases}$$

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^m y^j \bar{f}_j = \sum_{j=1}^m y^j \left(\sum_{i=1}^m s_j^i \bar{e}_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m y^j s_j^i \right) \bar{e}_i$$

Scrisura unui vector într-o bază este unică și $\bar{u} = \sum_{i=1}^m x^i \bar{e}_i$

dar și $\bar{u} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m y_j s_j^i \right) \bar{e}_i$, rezultă că:

$$x^i = \sum_{j=1}^m y_j s_j^i, \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Notăm $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}$. Atunci avem:

$$\boxed{X = S \cdot Y} \Leftrightarrow \boxed{Y = S^{-1} \cdot X}$$

Formula schimbării de coordonate

X = matricea coloană formată din coordonatele vectorului
în raport cu vechea bază

Y = matricea coloană formată din coordonatele vectorului
în raport cu noua bază

$S = M_{B_1, B_2}$ = matricea schimbării de bază de la
vechea bază B_1 la noua bază B_2

Problemă IV.

Determinarea dimensiunii sp. vect. al vect. liberi $\mathcal{V}_3$.

Propoziție Doi vectori sunt coliniari d. n. d. sunt liniar dependenți.

Dem. $(\Rightarrow)$ p. că $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_3$, $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Stim că $\vec{u} \parallel \vec{v} \mid \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^* \text{ a. } \vec{u} = a\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} - a\vec{v} = \vec{0} \mid \Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ lin. dependenți}$
 $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ $a \neq 0$

$(\Leftarrow)$ p. că $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_3$, $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ l. dependenți

$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ și $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

p. că $\alpha \neq 0$. Rez. că $\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}$. Deci $\vec{u} \parallel \vec{v}$. ▮

Observații: 1) $\dim \mathcal{V}_1 = 1$ ($\mathcal{V}_1 = \vec{0} = \{\vec{u} \in \mathcal{V}_3 \mid \vec{u} \parallel \vec{0}, \text{ f. duoptă}\}$)

2) Doi vectori necoliniari sunt l. independenți

3) $\dim \mathcal{V}_2 \geq 2$; $\dim \mathcal{V}_3 \geq 2$.

Propoziție. Trei vectori liberi sunt coplanari d. n. d. sunt liniar dependenți.

Dem. $(\Rightarrow)$ Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}_3$ și $O, A, B, C \in \mathcal{E}_3$ a. d.

$\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{v}$, $\vec{OC} = \vec{w}$.

p. că $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sunt coplanari. Rez. că dreptele OA, OB și OC sunt în același plan pe care îl vom nota π .

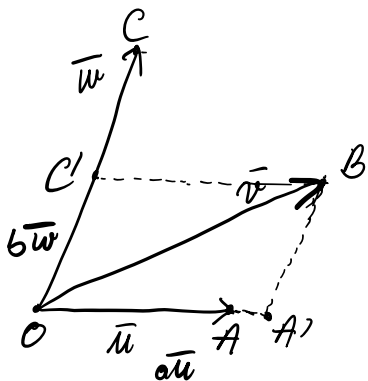
Fie $A' \in OA$ și $C' \in OC$ a. i. $\vec{OB} = \vec{OA'} + \vec{OC'}$. Cum $A' \in OA \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{OA'} = a \cdot \vec{OA}$, $a \in \mathbb{R}^*$ și cum $C' \in OC \Rightarrow \vec{OC'} = b \cdot \vec{OC}$, -CI-31-

Pun uitate $\vec{OB} = a\vec{OA} + b\vec{OC} \Leftrightarrow$

$$\vec{v} = a\vec{u} + b\vec{w} \Leftrightarrow$$

$a\vec{u} - \vec{v} + b\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ l. dependenti



$\Leftarrow$ $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ l. dependenti

$\Rightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 > 0$ a.d.

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}.$$

p. $a \neq 0$. Rez. c $\vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v} - \frac{c}{a}\vec{w}$

Fie $\{\vec{v}, \vec{w}\} \in V_2$; cum V_2 este sp. vect. real
rez. c $\vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v} - \frac{c}{a}\vec{w} \in V_2 \Leftrightarrow \vec{u} \in V_2$.

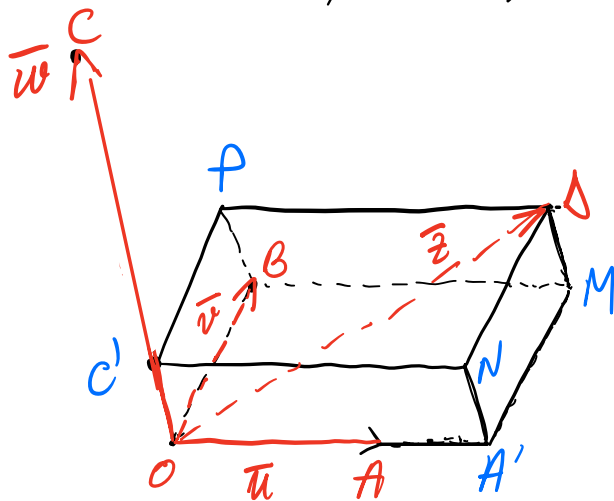
Pun uitate, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \in V_2 \Leftrightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ coplanari.

Observații: 1) $\dim V_2 = 2$ ($V_2 = \vec{\pi} = \{\vec{u} \in V_3 / \vec{u} \parallel \vec{\pi}, \vec{\pi}\text{-plan}\}$)

2) Trei vectori necoplanari sunt l. independenti.

3) $\dim V_3 \geq 3$

Dem. Sei $\pi, \sigma, \bar{\omega}, \bar{z} \in \mathcal{V}_{3, \beta}$, $0, A, B, C, \Delta \in \mathcal{E}_3$ ar.

$$\bar{u} = \overrightarrow{OA}, \bar{v} = \overrightarrow{OB}, \bar{w} = \overrightarrow{OC}, \bar{z} = \overrightarrow{OD}.$$

$$\begin{cases} \vec{OA'} = a \vec{OA}, a \neq 0 \\ \vec{OC'} = b \vec{OC}, b \neq 0 \\ OA - \text{diagonala po} \end{cases}$$

$$\{ \vec{OC} \} = b \vec{OC}, b \neq 0$$

101-diagonala paralelipipedului

Answer: $\vec{OA} = \vec{OM} + \vec{MA} = (\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OC} \Leftrightarrow$

$$\bar{2} = a\bar{u} + \bar{v} + b\bar{w} \quad (=)$$

$$a\bar{u} + \bar{v} + b\bar{w} - \bar{z} = \bar{0} \Rightarrow$$

$\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}\}$ l. dependenti:

Observatii : 1) $\dim V_3 = 3$

2) O bază din V_3 este formată din 3 vectori necoplanari,

iar o bază din V_2 este formată din 2 vect. necoliniari. -9-33-

3) Prin convenție, $\dim \{ \vec{0} \} = 0$.

4) Se poate demonstra și cu ajutorul definiției unei baze că 3 vect. necoplanari formează o bază în V_3 și 2 vect. necol. formează o bază în V_2 , dar nu vom mai prezenta această metodă aici.

Definiție „Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3 \setminus \{ \vec{0} \}$ doi vectori nenuli. Fie O, A și $B \in E_3$ a.t. $\vec{u} = \vec{OA}$ și $\vec{v} = \vec{OB}$. S.m. unghiul dintre vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ unghiul măsurat $\angle AOB \in [0, \pi]$.

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{v}, \vec{u}) = \angle AOB$$



Observație 1) Def. are caracter geometric.

2) Dacă $\vec{u}, \vec{v} \in V_3 \setminus \{ \vec{0} \}$, $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \{0, \pi\}$.

Definiție. Doi vectori $\vec{u}, \vec{v} \in V_3 \setminus \{ \vec{0} \}$ s.m. perpendiculari / ortogonali dacă $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.

Not. $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Observație. Prin convenție, $\vec{0} \perp \vec{u}$, $\vec{0} \parallel \vec{u}$, $\forall \vec{u} \in V_3$.

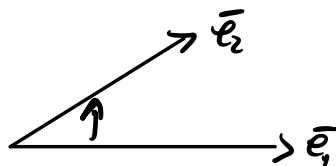
Definiție. Un vector $\vec{u} \in V_3$ s.m. unitar dacă $|\vec{u}| = 1$.

Definiție. Spunem că o bază $B = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ din V_3 este ortogonală dacă este o bază cu prop. că $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$.

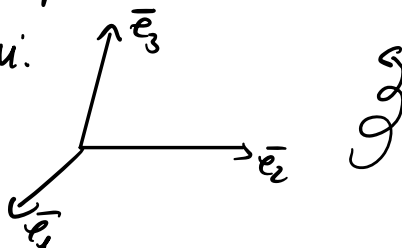
Definiție: Spunem că o bază $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ din V_3 este ortonormată dacă este o bază ortogonală și $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$.

Observație 1) De obicei, vectorii din bază ortonormată din V_3 se notează cu $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$

2) În V_2 o bază este pozitivă dacă sensul de parcurgere de la primul vector la al doilea vector respectă sensul trigonometric.



3) În V_3 o bază este pozitivă dacă vectorii din bază respectă regula burghiului.



Problema I

Formula schimbării de coordonate la schimbarea de repere contereine
în E_3

Definiție. Fie $O \in E_3$ și $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ o bază din V_3 . Configurația $R = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ s.m. refer contereine al lui E_3 .

O s.m. origine referului.

Definiție Fie $R = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ un refer contereine al lui E_3 și $M \in E_3$. Numim coordoatele punctului M în raport cu referul R , coordoatele vectorului $\vec{OM}$ în raport cu baza $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ din V_3 .

Fie $R_1 = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ și $R_2 = \{O'; \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ două refer de E_3 . Fie $M \in E_3$. Două să găsim legătura dintre coordoatele lui M în raport cu R_1 și coordoatele lui M în raport cu R_2 .

Not. $S = M_{B_1, B_2} = (s_{ij}^i)_{i,j=1,2,3}$, unde $B_1 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, $B_2 = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$
 $\bar{e}'_i = \sum_{j=1}^3 s_{ij}^i \bar{e}_j, \forall i=1,2,3$

$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \text{coordoatele lui } M \text{ în raport cu } R_1$
 $= \text{coordoatele lui } \vec{OM} \text{ în raport cu } B_1$

$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \text{coordoatele lui } M \text{ în raport cu } R_2$
 $= \text{coordoatele lui } \vec{O'M} \text{ în raport cu } B_2$

$$S_0 = \begin{pmatrix} s_0^1 \\ s_0^2 \\ s_0^3 \end{pmatrix} = \text{coordonatele lui } O' \text{ în raport cu } R_1$$

$$= \text{coordonatele lui } \vec{OO'} \text{ în raport cu } B_1$$

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x^i \vec{e}_i \\ &= \vec{OO'} + \vec{O'M} \\ &= (s_0^1 \vec{e}_1 + s_0^2 \vec{e}_2 + s_0^3 \vec{e}_3) + y^1 \vec{e}_1' + y^2 \vec{e}_2' + y^3 \vec{e}_3' \\ &= \sum_{i=1}^3 s_0^i \vec{e}_i + \sum_{j=1}^3 y^j \cdot \vec{e}_j' \\ &= \sum_{i=1}^3 s_0^i \vec{e}_i + \sum_{j=1}^3 y^j \cdot \left(\sum_{i=1}^3 s_j^i \vec{e}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(s_0^i + \sum_{j=1}^3 (y^j \cdot s_j^i) \right) \vec{e}_i \end{aligned} \Rightarrow$$

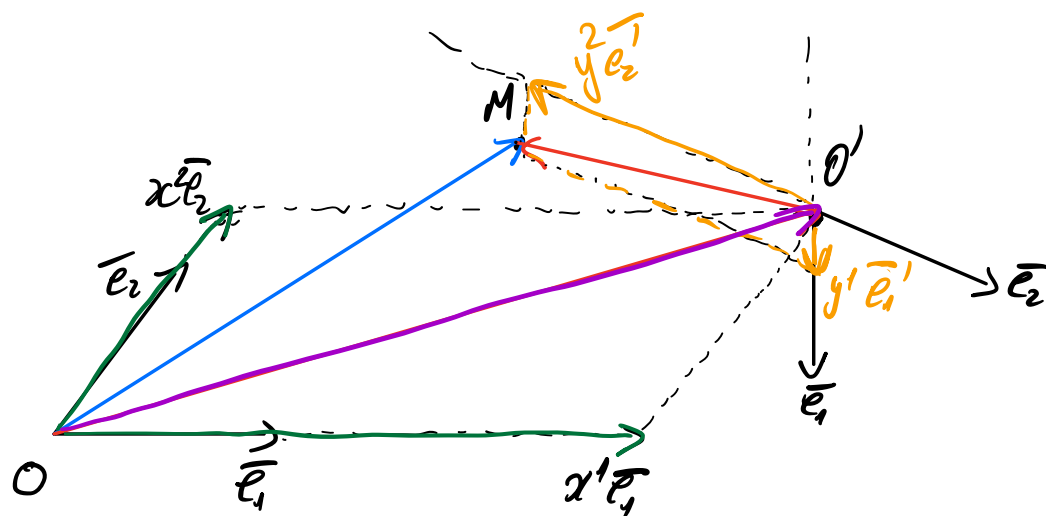
$$\Rightarrow x^i = s_0^i + \sum_{j=1}^3 s_j^i \cdot y^j, \quad \forall i = \overline{1,3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0^1 \\ s_0^2 \\ s_0^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X = S_0 + S \cdot X'} - \text{formula schimbării de coordonate}$$

obținută la schimbarea de repere

În dim. 2 :



Proiecție ortogonală; proiecție scalară

Definiție Fie $\bar{u} \in V_3 \setminus \{\bar{0}\}$. Numim spațiul generat de vectorul $\bar{u}$ și notăm $[\bar{u}]$ (sau $\langle \bar{u} \rangle$), spațiul format din toți vectorii colinari cu $\bar{u}$.

$$[\bar{u}] = \{ \bar{v} \in V_3 \mid \bar{v} = a \cdot \bar{u}, a \in \mathbb{R} \}$$

$$[\bar{u}] \underset{\Delta V.}{\subset} V_3, \dim_{\mathbb{R}} [\bar{u}] = 1$$

Definiție Fie $\bar{u} \in V_3 \setminus \{\bar{0}\}$. Numim spațiul ortogonal pe vectorul $\bar{u}$ și not. $[\bar{u}]^\perp$, spațiul format din toți vectorii ortogonali pe $\bar{u}$.

$$[\bar{u}]^\perp = \{ \bar{v} \in V_3 \mid \bar{v} \perp \bar{u} \}$$

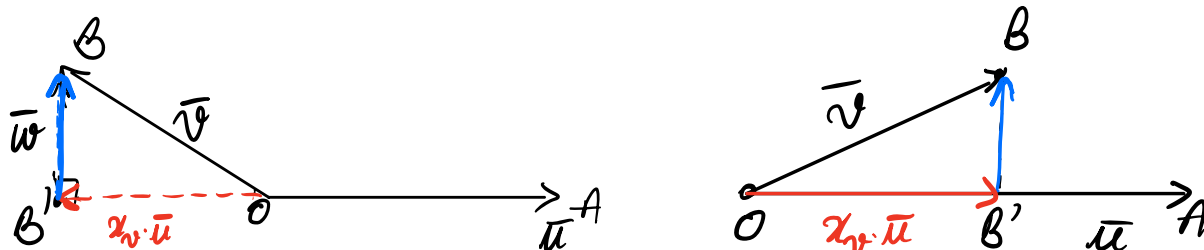
$$[\bar{u}]^\perp \underset{\Delta V.}{\subset} V_3, \dim_{\mathbb{R}} [\bar{u}]^\perp = 2$$

Observație 1) Dacă $\bar{v} \perp \bar{u}$, at. $\bar{v} \perp a\bar{u}, \forall a \in \mathbb{R}$.

$$2) [\bar{u}] \cap [\bar{u}]^\perp = \{\bar{0}\}$$

Proprietate. Fie $\bar{u} \in V_3 \setminus \{\bar{0}\}$. At. pt. $\forall \bar{v} \in V_3$, există unică perechea $(x_v, \bar{w})$ a. $x_v \in \mathbb{R}$, $\bar{w} \perp \bar{u}$, $\bar{w} \neq \bar{0}$ și $\bar{v} = x_v \cdot \bar{u} + \bar{w}$

Demonstratie



I. Existența. Fie $O, A, B \in E_3$ a. $\bar{u} = \vec{OA}$, $\bar{v} = \vec{OB}$. Fie $BB' \perp OA$, $B' \in OA$.

Cum B', O, A coliniare $\Rightarrow \exists x_v \in \mathbb{R}$ a. $\vec{OB'} = x_v \cdot \bar{u}$.

Not. $\bar{w} = \vec{B'B}$. Căci, $\bar{w} \perp \bar{u}$.

Prin însumare $\bar{v} = \vec{OB'} + \vec{B'B} (=) \bar{v} = x_v \cdot \bar{u} + \bar{w}$

II. Unicitatea: Fie $\bar{v} = x_v \bar{u} + \bar{w}$, $x_v, x'_v \in \mathbb{R}$, $\bar{w}, \bar{w}' \perp \bar{u}$
 $= x'_v \bar{u} + \bar{w}'$

$$\Rightarrow \underbrace{(x_v - x'_v) \bar{u}}_{\in [\bar{u}]} = \underbrace{\bar{w}' - \bar{w}}_{\in [\bar{u}]^\perp} \Rightarrow \begin{cases} x_v = x'_v \\ \bar{w}' = \bar{w} \end{cases}$$

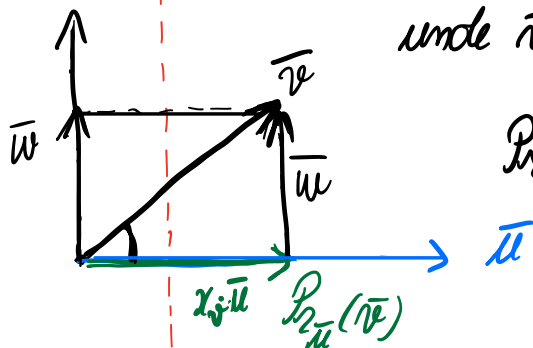
■

Observație $V_3 = [\bar{u}] \oplus [\bar{u}]^\perp$

Definiție. Fie $\bar{u} \in V_3 \setminus \{\bar{0}\}$. Definim proiecția ortogonală pe $\bar{u}$ ca fiind aplicația $P_{\bar{u}}: V_3 \rightarrow V_3$ dată prin

$$P_{\bar{u}}(\bar{v}) = x_v \cdot \bar{u}, \quad \forall \bar{v} \in V_3$$

unde $\bar{v} = x_v \cdot \bar{u} + \bar{w}$, $x_v \in \mathbb{R}$ și $\bar{w} \perp \bar{u}$



$P_{\bar{u}}(\bar{v})$ s.m. proiecția ortogonală a lui $\bar{v}$ pe $\bar{u}$

Doacă notăm cu $\bar{u}_0$ versorul lui $\bar{u}$ ($|\bar{u}_0| = 1$, $\bar{u}_0$ și $\bar{u}$ au același sens, $|\bar{u}_0| = 1$), i.e. $\bar{u}_0 = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$, putem rescrie

$$P_{\bar{u}}(\bar{v}) = x_v \cdot |\bar{u}| \cdot \bar{u}_0$$

Definiție. Fie $\bar{u} \in V_3 \setminus \{\bar{0}\}$. Definim proiecția scalară pe $\bar{u}$ ca fiind aplicația $p_{\bar{u}}: V_3 \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$p_{\bar{u}}(\bar{v}) = x_v \cdot |\bar{u}|$$

$$\text{Deci, } P_{\bar{u}}(\bar{v}) = p_{\bar{u}}(\bar{v}) \cdot \bar{u}_0$$

• Dacă $\angle(\bar{u}, \bar{v}) \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \rho_{\bar{u}}(\bar{v}) \geq 0 \Rightarrow |\rho_{\bar{u}}(\bar{v})| = \rho_{\bar{u}}(\bar{v})$

• Dacă $\angle(\bar{u}, \bar{v}) \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow \rho_{\bar{u}}(\bar{v}) < 0 \Rightarrow |\rho_{\bar{u}}(\bar{v})| = -\rho_{\bar{u}}(\bar{v})$

Observație $\bar{v} = \alpha \bar{u} + \bar{w} = \alpha \cdot |\bar{u}| \cdot \bar{u}_0 + \bar{w} = \rho_{\bar{u}}(\bar{v}) \cdot \bar{u}_0 + \bar{w}$

Propoziție a) $\rho_{\bar{u}}: \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathcal{V}_3$ este endomorfism liniar

b) $\rho_{\bar{u}}: \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ este formă liniară.

Demonstrație a) Se arată că.

$$\rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1) + \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_2), \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathcal{V}_3$$

$$\rho_{\bar{u}}(a\bar{v}) = a \rho_{\bar{u}}(\bar{v}), \forall \bar{v} \in \mathcal{V}_3, \forall a \in \mathbb{R}$$

○ Arătăm doar prima relație.

$$\mathcal{V}_3 = [\bar{u}] \oplus [\bar{u}]^\perp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{v}_1 = \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1) \bar{u}_0 + \bar{w}_1, \quad \bar{w}_1 \perp \bar{u} \quad \Rightarrow \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1) = \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1) \bar{u}_0$$

$$\bar{v}_2 = \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_2) \bar{u}_0 + \bar{w}_2, \quad \bar{w}_2 \perp \bar{u} \quad \Rightarrow \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_2) = \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_2) \bar{u}_0$$

$\Downarrow$

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (\rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1) + \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_2)) \bar{u}_0 + (\bar{w}_1 + \bar{w}_2), \quad (\bar{w}_1 + \bar{w}_2) \perp \bar{u}$$

$\Downarrow$

$$\rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = (\rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1) + \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_2)) \bar{u}_0$$

$$\rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1) + \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_2) = (\rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1) + \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_2)) \bar{u}_0 \quad \Rightarrow \text{q.e.d.}$$

○ Similar se arată a doua relație.

b) Am văzut la a) că:

$$\rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = (\rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1) + \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_2)) \cdot \bar{u}_0$$

De altă parte, $\rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \rho_{\bar{u}}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \cdot \bar{u}_0$ -c1-42-

$$\Rightarrow \rho_{\vec{u}}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \rho_{\vec{u}}(\vec{v}_1) + \rho_{\vec{u}}(\vec{v}_2).$$

Similar, α orotă

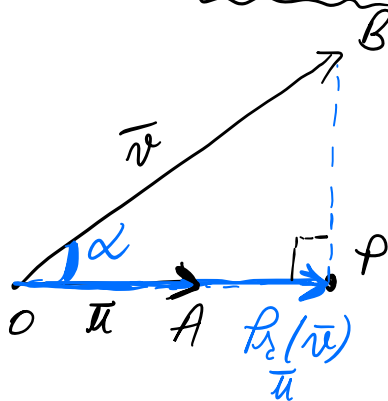
$$\rho_{\vec{u}}(a\vec{v}) = a \rho_{\vec{u}}(\vec{v})$$

$\Rightarrow \rho_{\vec{u}}$ - formă liniară. $\square$

Propoziție Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3 \setminus \{\vec{0}\}$. At. $\boxed{\rho_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})}$

Dem. Not. $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$; $\vec{u} = \vec{OA}$, $\vec{v} = \vec{OB}$.

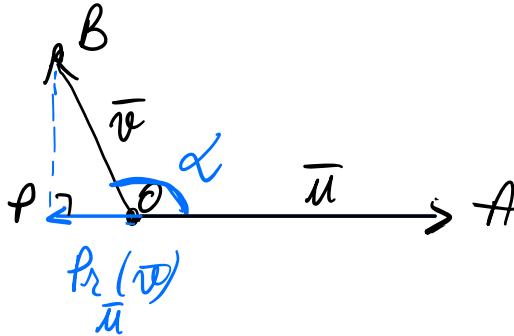
1) Dacă $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$. $\Rightarrow |\rho_{\vec{u}}(\vec{v})| = \rho_{\vec{u}}(\vec{v})$



Fie $P \in \mathcal{E}_3$ aș. $\vec{OP} = \rho_{\vec{u}}(\vec{v})$. At. avem:

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OB} = \frac{|\rho_{\vec{u}}(\vec{v})|}{|\vec{v}|} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\rho_{\vec{u}}(\vec{v})}{|\vec{v}|} \Leftrightarrow \boxed{\rho_{\vec{u}}(\vec{v}) = \cos \alpha \cdot |\vec{v}|}$$

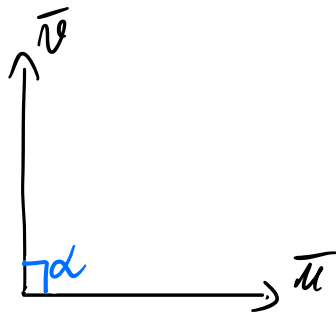
2) Dacă $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow p_{\vec{u}}(\vec{v})$ și $\vec{u}$ au sensuri opuse
 $\cos \alpha < 0, p_{\vec{u}}(\vec{v}) < 0, |p_{\vec{u}}(\vec{v})| = -p_{\vec{u}}(\vec{v})$



$$\Delta BOP \text{ (dr)} \Rightarrow \cos(\pi - \alpha) = \frac{|\vec{OP}|}{|\vec{v}|} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{-p_{\vec{u}}(\vec{v})}{|\vec{v}|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \cos \alpha \cdot |\vec{v}|}$$

3) Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p_{\vec{u}}(\vec{v}) = 0 \mid \Leftrightarrow p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \cos \alpha \cdot |\vec{v}|$
 $\cos \alpha = 0$



Observație. $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{v}, \vec{u}) \Rightarrow \frac{p_{\vec{u}}(\vec{v})}{|\vec{v}|} = \frac{p_{\vec{v}}(\vec{u})}{|\vec{u}|} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underline{|\vec{u}| p_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| p_{\vec{v}}(\vec{u})}$$

Definiție S.m. produsul scalar al vectorilor $\vec{u}, \vec{v}$ numărul real notat $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (sau $\vec{u} \cdot \vec{v}$) obținut astfel

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \vec{u} = \vec{0} \text{ sau } \vec{v} = \vec{0} \\ |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \varphi(\vec{u}, \vec{v}), & \text{dacă } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ și } \vec{v} \neq \vec{0}. \end{cases}$$

Observație. Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3 \setminus \{\vec{0}\}$. Atunci

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| \rho_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \rho_{\vec{v}}(\vec{u})$$

Propoziție Produsul scalar a doi vectori este un produs scalar în sens algebric, adică:

1) este o formă biliniară (liniară în fiecare argument)

$$\langle \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle$$

$$\langle a\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, a\vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

2) este simetric $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

3) este pozitiv definit

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0, \quad \forall \vec{u} \in V_3 \text{ și } \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

o pt. a dem. 1) se folosește faptul că pt. $\bar{u}, \bar{v} \in V_3 \setminus \{\bar{0}\}$

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = |\bar{u}| \operatorname{pr}_{\bar{u}}(\bar{v}) = |\bar{v}| \operatorname{pr}_{\bar{v}}(\bar{u})$$

și se ține cont că $\operatorname{pr}_{\bar{u}}: V_3 \rightarrow \mathbb{R}$ este o formă liniară.

o 2) este evident pt. că $\angle(\bar{u}, \bar{v}) = \angle(\bar{v}, \bar{u})$

o 3): Fie $\bar{u} \in V_3 \setminus \{\bar{0}\}$:

$$\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = |\bar{u}|^2 \cos \angle(\bar{u}, \bar{u}) \Rightarrow \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = |\bar{u}|^2 \geq 0,$$

egalitate cu zero are loc $\Leftrightarrow$ d.m.d. $|\bar{u}| = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$.

$(V_3, \angle, >)$ s.m. spațiul euclidian.

Definim $|\cdot|: V_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\bar{v} \mapsto |\bar{v}| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}$$

$|\bar{v}|$ = norma / lungimea / mărimea vect. $\bar{v}$ (coincide cu definiția lungimei vect. dată anterior).

Proprietăți

$$1) |\bar{u}| \geq 0, \forall \bar{u} \in V_3, |\bar{u}| = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$$

$$2) |a\bar{u}| = |a| \cdot |\bar{u}|, \forall \bar{u} \in V_3, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$3) |\bar{u} + \bar{v}| \leq |\bar{u}| + |\bar{v}|, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V_3 \text{ (ineg. triunghiului, ineg. Minkowski)}$$

$$4) \bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \angle \bar{u}, \bar{v} = 0$$

5) Fie $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ o bază ortonormată în V_3 , $\bar{u}, \bar{v} \in V_3$.

$$\bar{u} = u^1 \bar{i} + u^2 \bar{j} + u^3 \bar{k}$$

$$\bar{v} = v^1 \bar{i} + v^2 \bar{j} + v^3 \bar{k}$$

$$|\bar{u}|^2 = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2$$

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3$$

$\langle, \rangle$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

Propoziție. Fie $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ o bază ortonormată din V_3 și $S = \{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ un sist. de vectori din V_3 . Atunci S este o bază ortonormată în V_3 d.m.d. $M_{B,B'} \in O(3)$, adică este o matrice ortogonală.

Demonstrație Am văzut deja că S este bază d.m.d. $\det M_{B,B'} \neq 0$

$$\text{Notăm } M_{B,B'} = (s_{ij}^i)_{i,j=1,2,3}$$

$$\begin{cases} \bar{i}' = s_{11}^i \bar{i} + s_{21}^i \bar{j} + s_{31}^i \bar{k} \\ \bar{j}' = s_{12}^i \bar{i} + s_{22}^i \bar{j} + s_{32}^i \bar{k} \\ \bar{k}' = s_{13}^i \bar{i} + s_{23}^i \bar{j} + s_{33}^i \bar{k} \end{cases}$$

Sisteme bază ortonormată ($\Leftrightarrow$)

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} |\vec{i}'|=1 \\ |\vec{j}'|=1 \\ |\vec{k}'|=1 \\ \vec{i}' \perp \vec{j}' \\ \vec{i}' \perp \vec{k}' \\ \vec{j}' \perp \vec{k}' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s_1^1)^2 + (s_2^1)^2 + (s_3^1)^2 = 1 \\ (s_1^2)^2 + (s_2^2)^2 + (s_3^2)^2 = 1 \\ (s_1^3)^2 + (s_2^3)^2 + (s_3^3)^2 = 1 \\ s_1^1 s_1^2 + s_2^1 s_2^2 + s_3^1 s_3^2 = 0 \\ s_1^1 s_1^3 + s_2^1 s_2^3 + s_3^1 s_3^3 = 0 \\ s_2^2 s_1^3 + s_2^2 s_2^3 + s_3^2 s_3^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & s_3^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \\ s_1^3 & s_2^3 & s_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & s_3^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \\ s_1^3 & s_2^3 & s_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow) M_{BS} \cdot M_{BS}^t = I_3 \Leftrightarrow \underline{M_{BS} \in O(3)}$$



Observații 1) $M_{BB'} \in O(3) \Leftrightarrow M_{BB'}^t \cdot M_{BB'} = M_{BB'} \cdot M_{BB'}^t = I_3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow M_{BB'}^t = M_{BB'}^{-1} = M_{B',B}$

2) $\det M_{BB'} = \pm 1$.

3) B, B' orton.: $B \leftrightarrow B' \Leftrightarrow \det M_{BB'} = 1$.

$B \nleftrightarrow B' \Leftrightarrow \det M_{BB'} = -1$.

Produsul vectorial a 2 vect. liberi din $(V_3, < >)$

Considerăm V_3 orientat (șp. că o bază din V_3 este pozitivă dacă respectă regula burghinului) și fixăm $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ bază ortonormată poz. (b.o.p.)

Fie $\bar{u}, \bar{v} \in V_3$.

$$\begin{cases} \bar{u} = u^1 \bar{i} + u^2 \bar{j} + u^3 \bar{k} \\ \bar{v} = v^1 \bar{i} + v^2 \bar{j} + v^3 \bar{k} \end{cases}$$

Definiție S.m. produsul vectorial al vectorilor liberi $\bar{u}$ și $\bar{v}$, vectorul notat $\bar{u} \times \bar{v}$ dat prin

$$\begin{aligned} \bar{u} \times \bar{v} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & u^1 & v^1 \\ \bar{j} & u^2 & v^2 \\ \bar{k} & u^3 & v^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \bar{k} \\ &= (u^2 v^3 - u^3 v^2) \bar{i} - (u^1 v^3 - u^3 v^1) \bar{j} + (u^1 v^2 - u^2 v^1) \bar{k} \end{aligned}$$

Proprietăți. Fie $\bar{u}, \bar{v} \in V_3 \setminus \{\vec{0}\}$.

- 1) $\bar{u} \times \bar{v} \perp \bar{u}, \bar{u} \times \bar{v} \perp \bar{v}$
- 2) $\bar{u} \times \bar{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \bar{u} \parallel \bar{v}$
- 3) dacă $\bar{u} \times \bar{v} \neq \vec{0}$, at. $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v}\}$ b. pozitivă în V_3
- 4) Identitatea lui Lagrange
 $|\bar{u} \times \bar{v}|^2 + \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle^2 = |\bar{u}|^2 \cdot |\bar{v}|^2$

$$5) |\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}| |\bar{v}| \cdot \sin \angle(\bar{u}, \bar{v})$$

6) $\bar{u} \times \bar{v}$ nu depinde de baza pozitivă considerată;
el depinde doar de orientare.

$$7) \chi: \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathcal{V}_3 \quad \text{biliniară și antisimetrică}$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow \bar{u} \times \bar{v}$$

Dem. ① $\bar{u} \times \bar{v} \perp \bar{u} \Leftrightarrow \langle \bar{u} \times \bar{v}, \bar{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (u^2 v^3 - u^3 v^2) u^1 - (u^1 v^3 - u^3 v^1) u^2 + (u^1 v^2 - u^2 v^1) u^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (ader.)}$$

Analog, $\bar{u} \times \bar{v} \perp \bar{v}$.

② $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u^2, u^3) = \alpha_1 (v^2, v^3) \\ (u^1, u^3) = \alpha_2 (v^1, v^3) \\ (S) \begin{cases} (u^1, u^2) = \alpha_3 (v^1, v^2) \end{cases} \end{cases}$$

Cum $\bar{u} \in \mathcal{V}_3 \setminus \{\bar{0}\}$ putem pp că $\underline{u^1} \neq 0$. Cum $u^1 = \alpha_2 v^1 = \alpha_3 v^1$ rezultă că și $\underline{v^1} \neq 0$ și $\underline{\alpha_2 = \alpha_3 \neq 0}$. Atunci:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \neq 0 \\ (u^2, u^3) = \alpha_1 (v^2, v^3) \\ u^3 = \alpha v^3 \\ u^2 = \alpha v^2 \\ u^1 = \alpha v^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \neq 0 \\ u^i = \alpha v^i, \forall i = \overline{1, 3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{u} = \alpha \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} \parallel \bar{v}$$

③ Reamintim că pentru a defini produsul vectorial al doi vectori am folosit o b.o.p. $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Pentru a arăta că $B' = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ este o bază pozitivă dacă $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ este suficient să arătăm că $M_{B,B'}$ este inversabilă și $\det M_{B,B'} > 0$.

$$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \xrightarrow{M_{B,B'}} B' = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$$

$$M_{B,B'} = \begin{bmatrix} u^1 & v^1 & u^2 v^3 - u^3 v^2 \\ u^2 & v^2 & u^1 v^3 - u^3 v^1 \\ u^3 & v^3 & u^1 v^2 - u^2 v^1 \end{bmatrix}$$

$$\det M_{B,B'} = |\vec{u} \times \vec{v}|^2 \neq 0 \Leftrightarrow M_{B,B'} \text{ este inversabilă} \Leftrightarrow B' \text{ este bază}$$

$$\text{Cum } \det M_{B,B} > 0 \Rightarrow B \text{ o bază } B\text{-pozitivă} \left. \vphantom{\det M_{B,B} > 0} \right\} \Rightarrow B' \text{ este o bază poz. în } V_3.$$

Observație. În general, $B' = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ nu este o bază ortonormată, adică $M_{B,B'} \notin O(3)$.

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad |\vec{u} \times \vec{v}|^2 + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 &= \\ &= (u^2 v^3 - u^3 v^2)^2 + (u^1 v^3 - u^3 v^1)^2 + (u^1 v^2 - u^2 v^1)^2 + \\ &\quad + (u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3)^2 \\ &= ((u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2)((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2) \\ &= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad \angle \vec{u}, \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \quad \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ |\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \\ \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0, \pi] &\Rightarrow \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0 \end{aligned}$$

$\textcircled{6}$ Pentru a demonstra că $\vec{u} \times \vec{v}$ nu depinde de baza inițială fixată ci doar de orientare, amintim că un vector este unic determinat de direcție, sens și mărime.

- direcția lui $\vec{u} \times \vec{v}$ este dată de condițiile $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ și $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$.

$$[\vec{u} \times \vec{v}]^\perp = [\vec{u}, \vec{v}] \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} \in [\vec{u}, \vec{v}]^\perp$$

- lungimea lui $\vec{u} \times \vec{v}$ este dată de $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$

- sensul lui $\vec{u} \times \vec{v}$ este cel pt. care $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ este bază poz.

Dei $\vec{u} \times \vec{v}$ nu depinde de baza aleasă.

Pentru a arăta că $\vec{u} \times \vec{v}$ depinde de orientarea aleasă pe V_3 , vom demonstra că dacă schimbăm orientarea lui V_3 atunci $\vec{u} \times \vec{v}$ își va schimba sensul.

Dacă considerăm orientarea lui V_3 ca $\underline{B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}$ b.o.p., notăm

$$\vec{w}_1 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & u^1 & v^1 \\ \vec{j} & u^2 & v^2 \\ \vec{k} & u^3 & v^3 \end{vmatrix}$$

Dacă considerăm orientarea lui V_3 ca $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ b.o.m., atunci $\tilde{B} = \{\bar{i}, -\bar{j}, \bar{k}\}$ b.o.p.

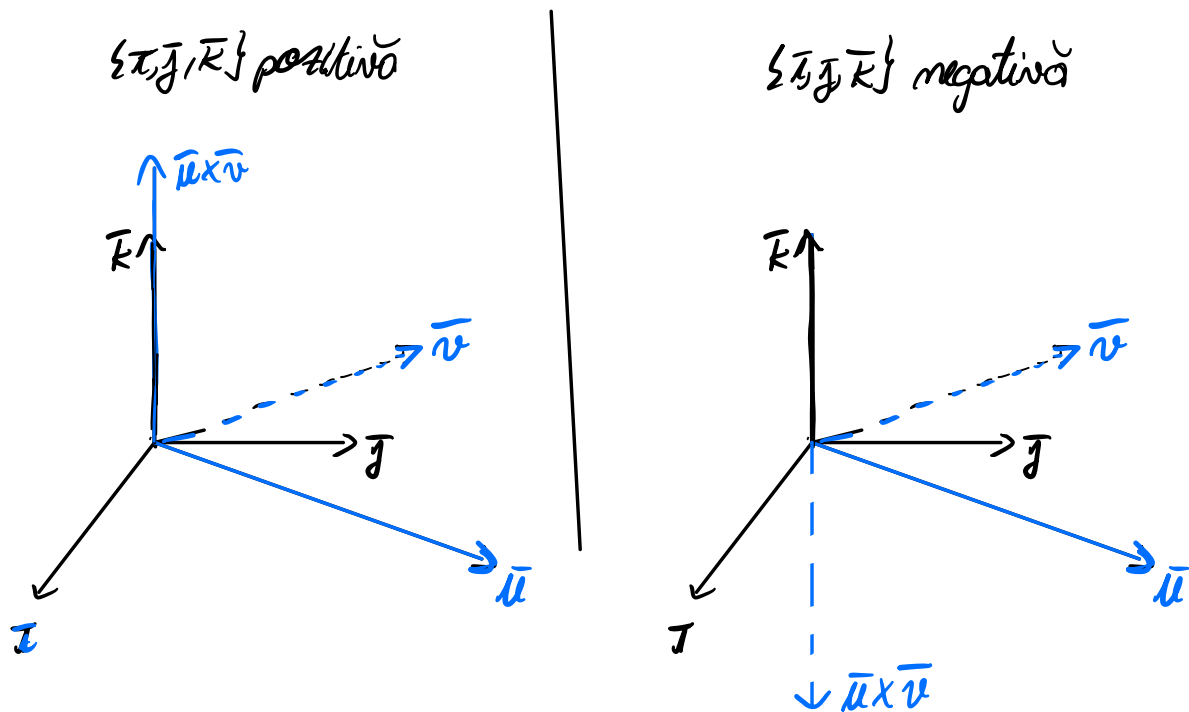
$$\bar{u} = u^1 \bar{i} + u^2 \bar{j} + u^3 \bar{k} \Rightarrow \bar{u} = u^1 \bar{i} + (-u^2) \bar{j} + u^3 \bar{k}$$

$$\bar{v} = v^1 \bar{i} + v^2 \bar{j} + v^3 \bar{k} \Rightarrow \bar{v} = v^1 \bar{i} + (-v^2) \bar{j} + v^3 \bar{k}$$

Ca ajutorul lui $\tilde{B}$ obținem:

$$\bar{w}_2 = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & u^1 & v^1 \\ \bar{j} & -u^2 & -v^2 \\ \bar{k} & u^3 & v^3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} \bar{i} & u^1 & v^1 \\ \bar{j} & u^2 & v^2 \\ \bar{k} & u^3 & v^3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \bar{i} & u^1 & v^1 \\ \bar{j} & u^2 & v^2 \\ \bar{k} & u^3 & v^3 \end{vmatrix}$$

Este clar că $\bar{w}_2 = -\bar{w}_1$, adică $\bar{u} \times \bar{v}$ și-a schimbat sensul deoarece am schimbat orientarea lui V_3 .



7) calcul direct:

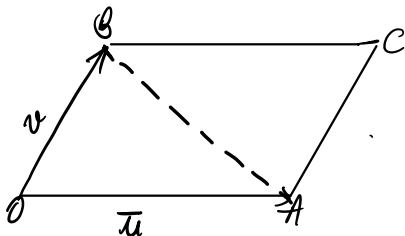
$$(\bar{u} + \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{u} \times \bar{w} + \bar{v} \times \bar{w}$$

$$\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$$

$$(a\bar{u}) \times \bar{w} = \bar{u} \times (a\bar{w}) = a \cdot \bar{u} \times \bar{w}$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{u}.$$

Propozitie Fie $\bar{u}, \bar{v} \in V_3 \setminus \{\vec{0}\}$ necoliniari. Atunci $|\bar{u} \times \bar{v}|$ reprez. aria paralelogramului construit pe cei doi vectori aplicati in acelasi punct, iar $\frac{1}{2} |\bar{u} \times \bar{v}|$ reprezinta aria triunghiului construit cu cei 2 vectori aplicati in acelasi punct.



Dem. Fie $\bar{u} = \vec{OA}$, $\bar{v} = \vec{OB}$ si OACB - paralelogram

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}| |\bar{v}| \sin \angle(\bar{u}, \bar{v}) \Leftrightarrow$$

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \angle(AOB) \Leftrightarrow$$

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = OA \cdot OB \cdot \sin \angle(AOB) \Leftrightarrow |\bar{u} \times \bar{v}| = A_{OACB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\bar{u} \times \bar{v}| = 2 A_{\Delta AOB} \Leftrightarrow A_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} |\bar{u} \times \bar{v}|$$

Fie $A, B, C \in (\pi)$ necoliniare. Fără a restrânge generalitatea putem considera $(\pi) = (xOy)$. Fie $R_\pi = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper cartezian în (xOy) și $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ în raport cu reperul fixat.

Amintim că noi am găsit o formulă pentru aria Δ -lui și o formulă pt. aria paralelogramului date cu ajutorul produsului vectorial. Dar produsul vectorial este definit doar pentru V_3 . Prin urmare, vom considera $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper cartezian din E_3 și vom identifica A, B și C cu $A(x_A, y_A, 0)$, $B(x_B, y_B, 0)$ și $C(x_C, y_C, 0) \in E_3$.

Astfel:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_B - x_A & x_C - x_A \\ \vec{j} & y_B - y_A & y_C - y_A \\ \vec{k} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)| \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Observație 1) Aria paralelogramului det. de vectorii $\vec{AB}$ și $\vec{AC}$, unde $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ este dată de.

$$2 \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

2) Dacă $A, B, C \in \pi$, cu $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ atunci A, B și C sunt coliniare d.m.d.

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dublul produs vectorial

Definiție. Fie $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V_3$. S.m. dublul produs vectorial al vectorilor $\bar{u}, \bar{v}$ și $\bar{w}$ vectorul $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$.

Propoziție. Pentru orice 3 vectori $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V_3$, avem:

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle \bar{v} - \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \bar{w}.$$

Demonstrație. $\odot$ p. $\bar{u} \parallel \bar{w}$.

$$\text{Atunci } \begin{cases} \bar{v} \times \bar{w} = \vec{0} \Rightarrow \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = \vec{0} \\ \bar{w} = a\bar{v} \Rightarrow \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle \bar{v} - \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \bar{w} = a\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \bar{v} - \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle a\bar{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Deci,
$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle \bar{v} - \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \bar{w}.$$

$\odot$ p. $\bar{v} \nparallel \bar{w}$

Fie $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ b.o.p. a.a.
$$\begin{cases} \bar{v} = v^1 \bar{i} \\ \bar{w} = w^1 \bar{i} + w^2 \bar{j}, w^2 \neq 0. \\ \bar{u} = u^1 \bar{i} + u^2 \bar{j} + u^3 \bar{k} \end{cases}$$

Obținem:
$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & v^1 & w^1 \\ \bar{j} & 0 & w^2 \\ \bar{k} & 0 & 0 \end{vmatrix} = (v^1 w^2) \bar{k}$$

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & u^1 & 0 \\ \bar{j} & u^2 & 0 \\ \bar{k} & u^3 & v^1 w^2 \end{vmatrix} = (u^2 v^1 w^2) \bar{i} - (u^1 v^1 w^2) \bar{j} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle \bar{v} - \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \bar{w} &= (u^1 w^1 + u^2 w^2) v^1 \bar{x} - \\
 &\quad - (u^1 v^1) (w^1 \bar{x} + w^2 \bar{y}) \\
 &= (u^2 v^1 w^2) \bar{x} - (u^1 v^1 w^2) \bar{y} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ Q.E.D.

Observație Produsul vectorial a 2 vectori liberi nu este asociativ.
 $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) \neq (\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}.$

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle \bar{v} - \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \bar{w} \in [\bar{v}, \bar{w}]$$

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = -\bar{w} \times (\bar{u} \times \bar{v}) = -\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle \bar{u} + \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle \bar{v} \in [\bar{u}, \bar{v}].$$

În general, $[\bar{u}, \bar{v}] \neq [\bar{v}, \bar{w}].$

Produsul mixt a 3 vectori

Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$, $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ b.o.p. în V_3 .

Definiție. S.m. produs mixt al vectorilor $\vec{u}, \vec{v}$ și $\vec{w}$ scđoul
 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$

Proprietăți

- 1) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ - coplanari
- 2) Dacă $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sunt 3 vectori nuli, necoplanari,
at. $|(u, v, w)|$ reprezintă volumul paralelipipedului
construit pe cei 3 vectori aplicați în același punct.

$$3) \text{ Dacă } \begin{cases} \vec{u} = u^1 \vec{i} + u^2 \vec{j} + u^3 \vec{k} \\ \vec{v} = v^1 \vec{i} + v^2 \vec{j} + v^3 \vec{k} \\ \vec{w} = w^1 \vec{i} + w^2 \vec{j} + w^3 \vec{k} \end{cases}$$

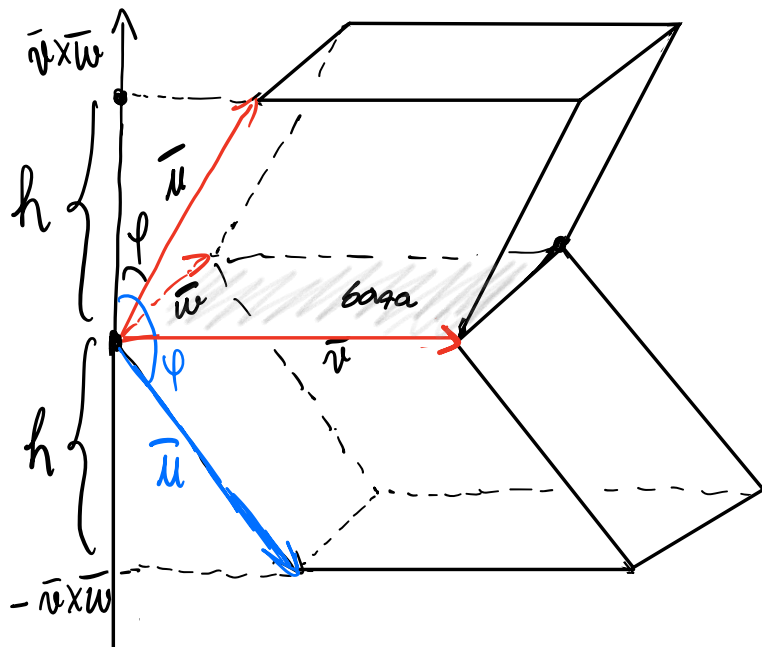
$$\text{at. } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix}$$

Demonstrație

- 1) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \times \vec{w}$
Dar $\vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{w}$ și $\vec{w} \perp \vec{v} \times \vec{w}$. Rez. că $\vec{v} \times \vec{w}$ este
perpendicular pe planul vect. det. de $\vec{u}, \vec{v}$ și $\vec{w}$. Deci
 $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ coplanari.

$$\left. \begin{array}{l} [\bar{v} \times \bar{w}]^\perp = [\bar{v}, \bar{w}] \\ \bar{u} \in [\bar{v} \times \bar{w}]^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{u} \in [\bar{v}, \bar{w}] \Rightarrow \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\} \text{ coplanari}$$

2) P. $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \neq 0 \Leftrightarrow \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ necoplanari, deci $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ necoliniari doi câte doi.



$$\begin{aligned} (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) &= \langle \bar{u}, \bar{v} \times \bar{w} \rangle = |\bar{u}| \cdot |\bar{v} \times \bar{w}| \cos \varphi = |\bar{u}| \cdot A_{\text{bazei}} \cos \varphi, \quad \varphi = \angle(\bar{u}, \bar{v} \times \bar{w}) \neq \frac{\pi}{2} \\ &= A_{\text{bazei}} \cdot \underbrace{|\bar{u}| \cdot \cos \varphi}_{=?} \end{aligned}$$

○ Dacă $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, at.

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = A_{\text{bazei}} \cdot h, \quad h = \text{înălțimea paralelipipedului}$$

○ Dacă $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, at.

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = -A_{\text{bazei}} \cdot \underbrace{|\bar{u}| \cdot \cos(\pi - \varphi)}_{=?} = -A_{\text{bazei}} \cdot h$$

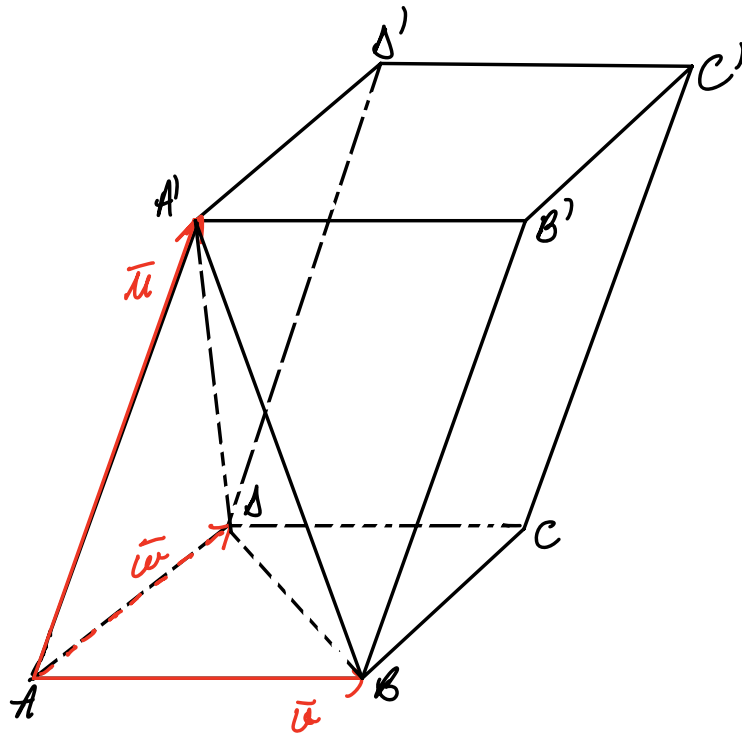
$$\text{Deci, } |(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})| = A_{\text{bazei}} \cdot h$$

3) - prin calcul direct.

- ca -

Exemplu

② Volumul tetraedrului construit pe cei 3 vect. este egal cu $\frac{1}{6} \cdot |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.



$$\begin{aligned} \text{Vol}_{A'DAB} &= \frac{1}{3} A_{\Delta ABD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} A_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \text{Vol}_{ABCD A'B'C'D'} = \\ &= \frac{1}{6} |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|. \end{aligned}$$

Teoremă

Fie $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$ patru puncte din E_3 .

At. A, B, C, D sunt coplanare d.m.d.

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dem: A, B, C, D coplanare $\Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ coplanari
 $\Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A & x_D - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A & y_D - y_A \\ z_B - z_A & z_C - z_A & z_D - z_A \end{vmatrix} = 0$$

①

$$\begin{vmatrix} x_B & x_C - x_A & x_D - x_A \\ y_B & y_C - y_A & y_D - y_A \\ z_B & z_C - z_A & z_D - z_A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_A & x_C - x_A & x_D - x_A \\ y_A & y_C - y_A & y_D - y_A \\ z_A & z_C - z_A & z_D - z_A \end{vmatrix} = 0$$

①

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} x_B & x_C & x_\Delta \\ y_B & y_C & y_\Delta \\ z_B & z_C & z_\Delta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_B & x_C & x_A \\ y_B & y_C & y_A \\ z_B & z_C & z_A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_B & x_A & x_\Delta \\ y_B & y_A & y_\Delta \\ z_B & z_A & z_\Delta \end{vmatrix} \\
 & + \underbrace{\begin{vmatrix} x_B & x_A & x_A \\ y_B & y_A & y_A \\ z_B & z_A & z_A \end{vmatrix}}_{=0} - \begin{vmatrix} x_A & x_C & x_\Delta \\ y_A & y_C & y_\Delta \\ z_A & z_C & z_\Delta \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} x_A & x_C & x_A \\ y_A & y_C & y_A \\ z_A & z_C & z_A \end{vmatrix}}_{=0} \\
 & + \underbrace{\begin{vmatrix} x_A & x_A & x_\Delta \\ y_A & y_A & y_\Delta \\ z_A & z_A & z_\Delta \end{vmatrix}}_{=0} - \underbrace{\begin{vmatrix} x_A & x_A & x_A \\ y_A & y_A & y_A \\ z_A & z_A & z_A \end{vmatrix}}_{=0} = 0
 \end{aligned}$$

②

$$\begin{vmatrix} x_B & x_C & x_\Delta \\ y_B & y_C & y_\Delta \\ z_B & z_C & z_\Delta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_B & x_C & x_A \\ y_B & y_C & y_A \\ z_B & z_C & z_A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_B & x_A & x_\Delta \\ y_B & y_A & y_\Delta \\ z_B & z_A & z_\Delta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_A & x_C & x_\Delta \\ y_A & y_C & y_\Delta \\ z_A & z_C & z_\Delta \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{matrix} \leftarrow \rightarrow \leftarrow \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \leftarrow \end{matrix}$

③

$$\begin{vmatrix} x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \\ x_D & y_D & z_D \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_C & y_C & z_C \\ x_D & y_D & z_D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_D & y_D & z_D \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = 0$$

II

$$- \begin{vmatrix} x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \\ x_D & y_D & z_D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_C & y_C & z_C \\ x_D & y_D & z_D \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_D & y_D & z_D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = 0$$

III

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Teoremă. Fie $\bar{u}_i, \bar{v}_i \in (\mathcal{V}_3, \langle, \rangle)$ orientat, $i, j = \overline{1, 3}$.
At.

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2) = \begin{vmatrix} \langle \bar{u}_1, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{u}_1, \bar{v}_2 \rangle & \bar{u}_1 \\ \langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{u}_2, \bar{v}_2 \rangle & \bar{u}_2 \\ \langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle & \bar{u}_3 \end{vmatrix}$$

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \begin{vmatrix} \langle \bar{u}_1, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{u}_1, \bar{v}_2 \rangle & \langle \bar{u}_1, \bar{v}_3 \rangle \\ \langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{u}_2, \bar{v}_2 \rangle & \langle \bar{u}_2, \bar{v}_3 \rangle \\ \langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle & \langle \bar{u}_3, \bar{v}_3 \rangle \end{vmatrix}$$

Definiție. Fie $(\mathcal{V}_3, \langle, \rangle)$ și $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p \in \mathcal{V}_n$, $p \geq 1$. S.m.
determinantul Gramm al sist. (ordonat) $S = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\}$
notat

$$G(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p) = \det(\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle) = \begin{vmatrix} \langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle & \dots & \langle \bar{v}_1, \bar{v}_p \rangle \\ \langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle & \dots & \langle \bar{v}_2, \bar{v}_p \rangle \\ \vdots & & \\ \langle \bar{v}_p, \bar{v}_1 \rangle & \dots & \langle \bar{v}_p, \bar{v}_p \rangle \end{vmatrix}$$

Observații

1) Pt. $\underline{p=1} \Rightarrow G(\bar{v}_1) = |\bar{v}_1|^2$

2) It. $\underline{p=2} \Rightarrow$

$$G(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \begin{vmatrix} \langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle \\ \langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle \end{vmatrix} = |\bar{v}_1|^2 \cdot |\bar{v}_2|^2 - \langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle^2$$

3) It. $\underline{m=3}, \underline{p=2} \Rightarrow$

$$G(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = |\bar{v}_1 \times \bar{v}_2|^2$$

4) În V_3 , doi vectori sunt coliniari d.m.d. $G(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 0$.
 { dacă $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ sunt necoliniari, at. aria
 paralelogramului det. de $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ este egală cu $\sqrt{G(\bar{v}_1, \bar{v}_2)}$.

5) It. $\underline{m=3}, \underline{p=3}$

$$G(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \begin{vmatrix} \langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle & \langle \bar{v}_1, \bar{v}_3 \rangle \\ \langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle & \langle \bar{v}_2, \bar{v}_3 \rangle \\ \langle \bar{v}_3, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{v}_3, \bar{v}_2 \rangle & \langle \bar{v}_3, \bar{v}_3 \rangle \end{vmatrix} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)^2$$

5) În V_3 { 3 vectori sunt coplanari d.m.d. $G(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = 0$
 { dacă $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ sunt necoplanari at. volumul
 paralelipipedului det. de $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$ este egal cu $\sqrt{G(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)}$.

Baza reciprocă pentru o bază dată

Propoziție. Fie $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ o bază din V_3 . Atunci sistemul de vect. $\{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*\}$ dat, prin relațiile $\langle \bar{e}_i^*, \bar{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1,3}$ formând o bază în V_3 .

Demonstrație. Trebuie să arătăm $\{\bar{e}_i^*\}_{i=\overline{1,3}}$ lin. indep.

$$a\bar{e}_1^* + b\bar{e}_2^* + c\bar{e}_3^* = \vec{0} / \langle \bar{e}_i^*, \vec{0} \rangle \Rightarrow a=b=c=0$$

Definiție. Fie $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ bază în V_3 . $B^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*\}$

n.m. baza reciprocă bazei B care satisface

$$\langle \bar{e}_i^*, \bar{e}_j \rangle = \delta_{ij} ; i, j = \overline{1,3}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} ; \delta_{ij} \text{ n.m. } \underline{\text{simbolii lui Kronecker}}$$

Propoziție. Fie $(V_3, \langle, \rangle)$ orientat și $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ bază și $B^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*\}$ bază reciprocă bazei B . At.

$$\bar{e}_1^* = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} ; \bar{e}_2^* = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} ; \bar{e}_3^* = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}$$

$$\text{Dem: } \left. \begin{aligned} \langle \bar{e}_1^*, \bar{e}_2 \rangle &= 0 \\ \langle \bar{e}_1^*, \bar{e}_3 \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{e}_1^* \parallel \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} \text{ a.s. } \bar{e}_1^* = a \bar{e}_2 \times \bar{e}_3$$

$$\langle \bar{e}_1^*, \bar{e}_1 \rangle = 1 \Rightarrow a \langle \bar{e}_2 \times \bar{e}_3, \bar{e}_1 \rangle = 1 \Leftrightarrow$$

$$a(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}$$

Deci $\bar{e}_1^* = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}$. Similar se obțin celelalte relații.

Propoziție $B^* \circ B$.

Demonstrație $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ b.p.a. în V_3
 $B_1 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ b.o.p. în V_3
 $B^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*\}$ baza reciprocă bazei B .

$$B_1 \xrightarrow{M_{B_1, B}} B \xrightarrow{M_{B, B^*}} B^*$$

$$M_{B_1, B^*} = M_{B_1, B} \cdot M_{B, B^*}$$

$$\det M_{B_1, B^*} = \det M_{B_1, B} \cdot \det M_{B, B^*} \quad / : (\det M_{B_1, B})$$

$$\det M_{B, B^*} = \frac{1}{\det M_{B_1, B}} \cdot \det M_{B_1, B^*}$$

- C1-68 -

$$\det M_{B, B^*} = \frac{1}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} \circ \det M_{B_1, B^*}$$

$$\text{II} \quad \det M_{B, B^*} = \frac{(\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} = \frac{\langle \bar{e}_1^*, \bar{e}_2^* \times \bar{e}_3^* \rangle}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{e}_1^*, \bar{e}_2^* \times \bar{e}_3^* \rangle &= \left\langle \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}, \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} \times \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)^3} \langle \bar{e}_2 \times \bar{e}_3, (\bar{e}_3 \times \bar{e}_1) \times (\bar{e}_1 \times \bar{e}_2) \rangle \\ &= \frac{1}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)^3} \langle \bar{e}_2 \times \bar{e}_3, \langle \bar{e}_3 \times \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_1 - \underbrace{\langle \bar{e}_3 \times \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_2}_{=0} \rangle \\ &= \frac{1}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)^3} (\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_1) (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \\ &= \frac{1}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} \end{aligned}$$

Deu,

$$\det M_{B, B^*} = \frac{1}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)^2} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{B \circ B^*}}$$



Observatie. Baza reciprocă a unei baze ortonormate în V_3 este însăși baza respectivă.

$$\begin{aligned} \text{Dem: } & \langle \bar{\pi}^*, \bar{\pi} \rangle = 1 \\ & \left. \begin{array}{l} \bar{\pi}^* \perp \bar{J} \\ \bar{\pi}^* \perp \bar{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\pi}^* = \alpha \bar{\pi} \quad \left. \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ \alpha |\bar{\pi}|^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \bar{\pi}^* = \bar{\pi}. \end{aligned}$$

Analog, $\bar{J}^* = \bar{J}$, $\bar{K}^* = \bar{K}$.

Ecuatii vectoriale în $(V_3, \langle, \rangle)$

Propositie. Fie $(V_3, \langle, \rangle)$.

a) Dacă $\bar{a} \in V_3 \setminus \{\bar{0}\}$ at. ec. $\langle \bar{a}, \bar{x} \rangle = m$ are o infinitate de soluții.

b) Dacă considerăm V_3 orientat, $\bar{a}, \bar{b} \in V_3 \setminus \{\bar{0}\}$, $\bar{a} \perp \bar{b}$ at. ecuația $\bar{a} \times \bar{x} = \bar{b}$ are o infinitate de soluții.

c) Dacă $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V_3$ a.i. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \neq 0$, atunci sist. vect.

$$\begin{cases} \langle \bar{a}, \bar{x} \rangle = m \\ \langle \bar{b}, \bar{x} \rangle = n \\ \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle = p \end{cases} \quad \text{are sol. unică.}$$

Demonstrație a) Fie $\bar{a} \in V_3 \setminus \{\bar{0}\}$. Reamintim că $V_3 = [\bar{a}] \oplus [\bar{a}]^\perp$

Fie $\bar{x} \in V_3$ a.i. $\langle \bar{a}, \bar{x} \rangle = m$.

Cum $\bar{x} \in V_3 \Rightarrow \bar{x} = \alpha \bar{a} + \bar{w}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{w} \perp \bar{a}$ } $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha \underbrace{|\bar{a}|^2}_=0 + \langle \bar{a}, \bar{w} \rangle = m \Leftrightarrow \alpha = \frac{m}{|\bar{a}|^2}$$

$$\text{Deci } \boxed{\bar{x} = \frac{m}{|\bar{a}|^2} \bar{a} + \bar{w}, \bar{w} \perp \bar{a}}$$

Cum $\bar{u} \perp \bar{a} \Rightarrow \bar{u} = \bar{a} \times \bar{u}$, $\bar{u} \in V_3$ și deci

$$\boxed{\bar{x} = \frac{m}{|\bar{a}|^2} \bar{a} + \bar{a} \times \bar{u}, \quad \bar{u} \in V_3}$$

b) Fie $\bar{a}, \bar{b} \in V_3 \setminus \{ \bar{0} \}$. Vom să aflăm $\bar{x} \in V_3$ a.t. $\bar{a} \times \bar{x} = \bar{b}$.

Cum $\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \nparallel \bar{b}$ și putem considera $\{ \bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b} \}$ bază în V_3 . $\Rightarrow$

$$\bar{x} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{a} \times \bar{b}, \quad \alpha, \beta, \gamma = ?$$

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{x} = \bar{b} & (\Leftrightarrow) \beta \bar{a} \times \bar{b} + \gamma \bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{b} \\ & (\Leftrightarrow) \beta \bar{a} \times \bar{b} + \gamma (\underbrace{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}_{=0} \bar{a} - \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle \bar{b}) = \bar{b} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \beta \bar{a} \times \bar{b} - \gamma |\bar{a}|^2 \bar{b} = \bar{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\frac{1}{|\bar{a}|^2} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Deci

$$\boxed{\bar{x} = \alpha \bar{a} - \frac{1}{|\bar{a}|^2} \bar{a} \times \bar{b}, \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

Obs. Dacă $\bar{a} \neq \bar{b}$ ec. $\bar{a} \times \bar{x} = \bar{b}$ nu are soluții.

c) Fie $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V_3$ aî. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \neq 0$. $\Leftrightarrow$
 $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ nuoplanari $\Leftrightarrow \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ baze în V_3 .
Fie $\{\bar{a}^*, \bar{b}^*, \bar{c}^*\}$ baza reciprocă bazei $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$
Fie $\bar{x} \in V_3$ sol. a sist.

$$\begin{cases} \langle \bar{a}, \bar{x} \rangle = m \\ \langle \bar{b}, \bar{x} \rangle = n \\ \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle = p. \end{cases}$$

$$\bar{x} = \alpha \bar{a}^* + \beta \bar{b}^* + \gamma \bar{c}^* \quad / \langle \bar{a} \rangle / \langle \bar{b} \rangle / \langle \bar{c} \rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \alpha \\ n = \beta \\ p = \gamma \end{cases}$$

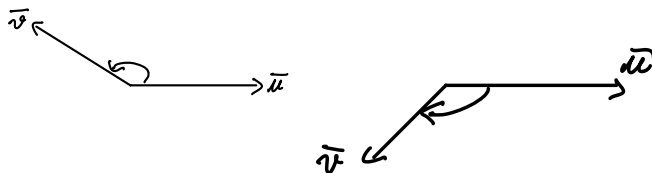
Deci $\bar{x} = m \bar{a}^* + n \bar{b}^* + p \bar{c}^*$. Dacă, în plus, considerăm V_3 orientat:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} [m(\bar{b} \times \bar{c}) + n(\bar{c} \times \bar{a}) + p(\bar{a} \times \bar{b})]}$$

Schimbări de bază ortonormate în $(V_2, \langle, \rangle)$

În $(V_2, \langle, \rangle)$ considerăm $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ b.o.p. $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j}$. Fie $\bar{u}, \bar{v} \in V_2$.

$$\begin{cases} \bar{u} = u^1 \bar{i} + u^2 \bar{j} \\ \bar{v} = v^1 \bar{i} + v^2 \bar{j} \end{cases}$$



Definiție Unghiul orientat dintre vectorul $\bar{u}$ și vect. $\bar{v}$ (în această ordine) este nr. $\varphi(\bar{u}, \bar{v})_0 \in (-\pi, \pi]$ def. prin relațiile:

$$\boxed{\cos \varphi(\bar{u}, \bar{v})_0 = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|} \quad \sin \varphi(\bar{u}, \bar{v})_0 = \frac{\begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}}$$

Se verifică imediat că $\sin^2 \varphi(\bar{u}, \bar{v})_0 + \cos^2 \varphi(\bar{u}, \bar{v})_0 = 1$.

Lemă. Unghiul orientat a 2 vect. liberi, nemuli, nu depinde de baza B , ci numai de orientarea sp. V_2 .

Dem. Dacă $\bar{u} \parallel \bar{v} \Rightarrow \varphi(\bar{u}, \bar{v})_0 = \varphi(\bar{u}, \bar{v}) \in \{0, \pi\}$

Dacă $\bar{u} \nparallel \bar{v}$,

$$\cos \varphi(\bar{u}, \bar{v})_0 = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|} \quad \text{nu depinde de } B$$

$$\cos^2 \varphi(\bar{u}, \bar{v})_0 + \sin^2 \varphi(\bar{u}, \bar{v})_0 = 1 \quad \Downarrow$$

$$\sin \varphi(\bar{u}, \bar{v})_0 = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle^2}{|\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2}}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

$$E=1 \Rightarrow \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow \{\bar{u}, \bar{v}\} \circ \{\bar{i}, \bar{j}\}, \quad B=\{\bar{i}, \bar{j}\} \text{ b.p.} \\ \Rightarrow \{\bar{u}, \bar{v}\} \text{ bază poz. în } V_2$$

$$E=-1 \Rightarrow \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} < 0 \Leftrightarrow \{\bar{u}, \bar{v}\} \bar{\circ} \{\bar{i}, \bar{j}\}, \quad B=\{\bar{i}, \bar{j}\} \text{ b.p.} \\ \Rightarrow \{\bar{u}, \bar{v}\} \text{ bază neg. în } V_2$$

Deci E depinde numai de orientarea lui V_2 .

Observație Dacă $\bar{u}, \bar{v} \in V_2 \setminus \{\bar{0}\}$ at. $\ast(\bar{u}, \bar{v})_0 = -\ast(\bar{v}, \bar{u})_0$.

Teoremă. Fie $B=\{\bar{i}, \bar{j}\}$ b.o.p. în $(V_2, \langle, \rangle)$. At. o bază ortonormată arbitrară $B'=\{\bar{i}', \bar{j}'\}$ în V_2 este dată de:

$$a) \begin{cases} \bar{i}' = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j} \\ \bar{j}' = -\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j} \end{cases}, \text{ dacă } B' \circ B$$

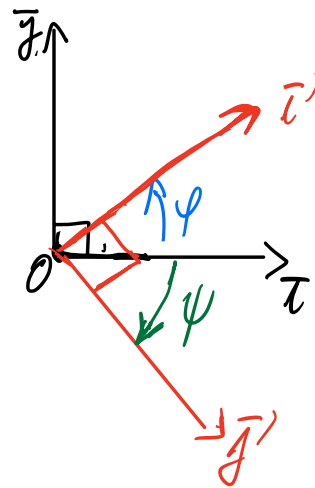
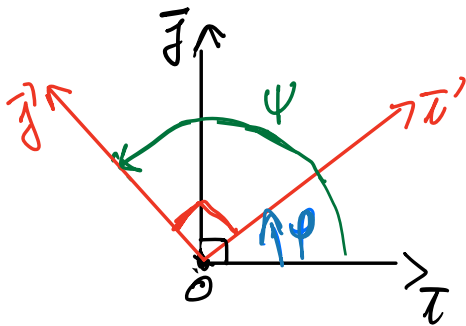
$$b) \begin{cases} \bar{i}' = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j} \\ \bar{j}' = \sin \varphi \bar{i} - \cos \varphi \bar{j} \end{cases}, \text{ dacă } B' \bar{\circ} B.$$

unde $\varphi = \ast(\bar{i}, \bar{i}')_0 \in (-\pi, \pi]$.

Dem. Considerăm $\bar{i}, \bar{j}, \bar{i}', \bar{j}'$ aplicati în același pct. O .

$$\square \quad \bar{i}' = x^1 \bar{i} + x^2 \bar{j}, \quad |\bar{i}'|=1 \Leftrightarrow (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1.$$

$$\bullet \quad \left. \begin{aligned} &\langle \bar{i}', \bar{i} \rangle = x^1 \\ &\text{Fie } \varphi = \ast(\bar{i}, \bar{i}')_0. \text{ At. } \cos \varphi = \langle \bar{i}, \bar{i}' \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{x^1 = \cos \varphi}$$



• $\langle \bar{x}', \bar{y} \rangle = x^2$
 $\varphi = \varphi(x, \bar{x}') \Rightarrow \sin \varphi = \begin{vmatrix} 1 & x' \\ 0 & x^2 \end{vmatrix} = x^2$

Deci, $\bar{x}' = \cos \varphi \bar{x} + \sin \varphi \bar{y}$.

Considerăm $\psi = \varphi(\bar{x}, \bar{y}')$

□ $\bar{y}' = y' \bar{x} + y^2 \bar{y}, |\bar{y}'| = 1 \Leftrightarrow (y')^2 + (y^2)^2 = 1$

$\cos \psi = \langle \bar{x}, \bar{y}' \rangle = y'$
 $\sin \psi = \begin{vmatrix} 1 & y' \\ 0 & y^2 \end{vmatrix} = y^2$ } $\Rightarrow \bar{y}' = \cos \psi \bar{x} + \sin \psi \bar{y}$

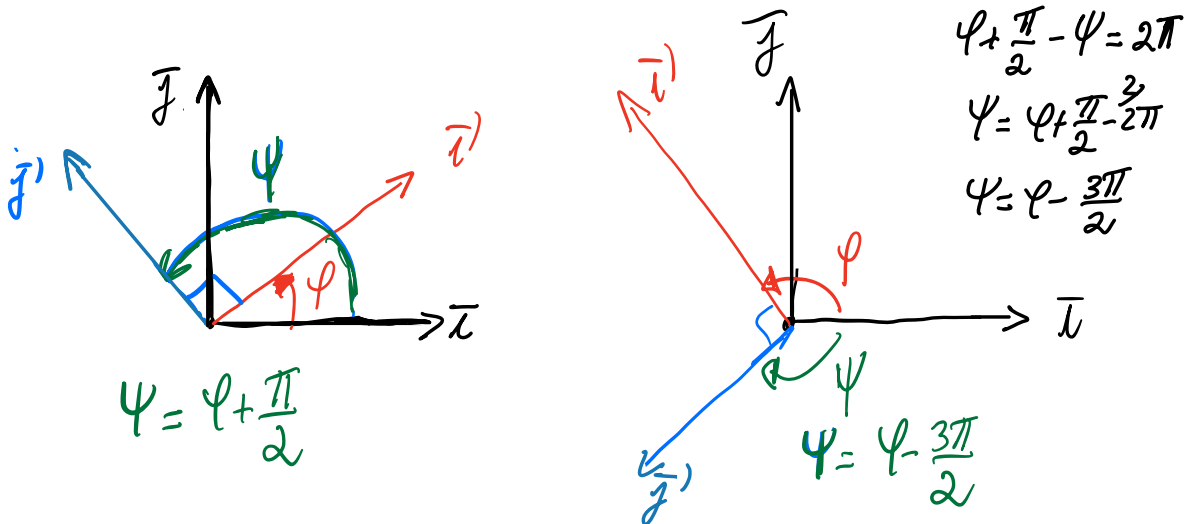
□ $\langle \bar{x}', \bar{y}' \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi = 0$

$\Leftrightarrow \cos(\psi - \varphi) = 0$
 $\varphi, \psi \in (-\pi, \pi] \Rightarrow \psi - \varphi \in (-2\pi, 2\pi] \Rightarrow \psi - \varphi \in \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2} \right\}$

⊙ Dacă $\Psi - \varphi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \right\} \Leftrightarrow \Psi \in \left\{ \varphi + \frac{\pi}{2}, \varphi - \frac{3\pi}{2} \right\}$

$$\begin{cases} \cos \Psi = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin \varphi \\ \sin \Psi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos \varphi \end{cases}$$

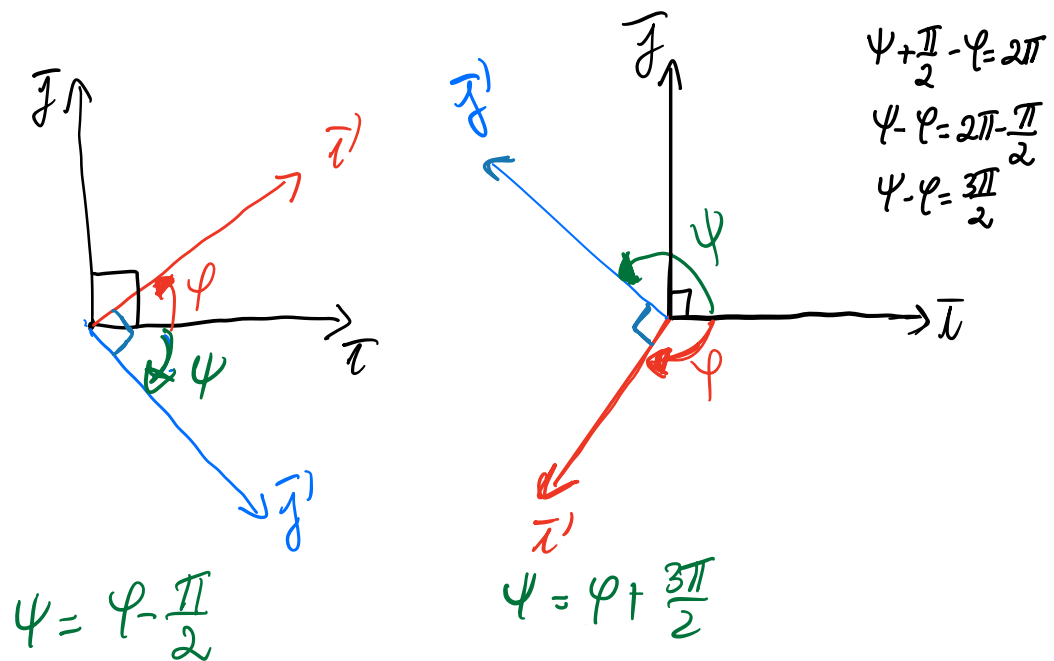
Deci $\boxed{\bar{y}' = -\sin \varphi \bar{x} + \cos \varphi \bar{y}}$



⊙ Dacă $\Psi - \varphi \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2} \right\} \Leftrightarrow \Psi \in \left\{ \varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{3\pi}{2} \right\}$

$$\begin{cases} \cos \Psi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\varphi + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin \varphi \\ \sin \Psi = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\varphi + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos \varphi \end{cases}$$

Deci $\boxed{\bar{y}' = \sin \varphi \bar{x} - \cos \varphi \bar{y}}$



$$B \xrightarrow{M_{B,B'}} B'$$

$$B \leftrightarrow B' \Rightarrow M_{B,B'} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, M_{B,B'} \in O(2), \det M_{B,B'} = 1$$

↪ schimbare de bază de tipul I / rotatie

$$B \leftrightarrow B' \Rightarrow M_{B,B'} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix}, M_{B,B'} \in O(2), \det M_{B,B'} = -1.$$

↪ schimbare de bază de tipul II

Observație $B = \{i, j\}$ b.o.p. în V_2 ; $\forall \bar{v} \in V_2, |\bar{v}| = 1$ admite
scrierea $\bar{v} = \cos \varphi i + \sin \varphi j$, unde $\varphi = \angle(i, \bar{v})$.

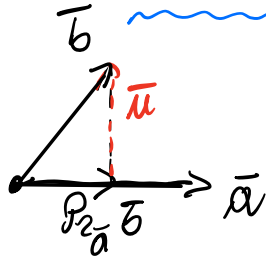
Procedeu de ortonormare Gram-Schmidt

Vom arăta că plecând de la o bază arbitrară din V_3 putem construi una ortonormată (folosind procedeu de ortonormare Gram-Schmidt)

Fie $B = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ o bază în V_3 .

Postăm $\bar{a}$ și vom schimba ceilalți 2 vectori $\bar{b}$ și $\bar{c}$.

1) Construim $\bar{u} = \bar{b} - P_{\bar{a}} \bar{b} \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{b} - \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{|\bar{a}|^2} \bar{a}$



Observăm că $\bar{a} \perp \bar{u}$:

$$\begin{aligned} \langle \bar{a}, \bar{u} \rangle &= \langle \bar{a}, \bar{b} - \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{|\bar{a}|^2} \bar{a} \rangle \\ &= \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle - \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{|\bar{a}|^2} |\bar{a}|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$B = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \xrightarrow{S_1} \{\bar{a}, \bar{u}, \bar{c}\}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{|\bar{a}|^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_1 \in O(3)$$

; $\det S_1 = 1 > 0 \Rightarrow B' = \{\bar{a}, \bar{u}, \bar{c}\}$
 este o bază la fel orientată
 cu baza B

2) Construim $\bar{v} = \bar{c} - \underline{P_{\bar{a}}(\bar{c})} - \underline{P_{\bar{u}}(\bar{c})}$

$$\Downarrow$$

$$\bar{v} = \bar{c} - \frac{\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle}{|\bar{a}|^2} \bar{a} - \frac{\langle \bar{u}, \bar{c} \rangle}{|\bar{u}|^2} \bar{u}$$

Observăm că $\bar{a} \perp \bar{v}$, $\bar{u} \perp \bar{v}$:

$$\begin{aligned} \langle \bar{a}, \bar{v} \rangle &= \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle - \frac{\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle}{|\bar{a}|^2} |\bar{a}|^2 - \frac{\langle \bar{u}, \bar{c} \rangle}{|\bar{u}|^2} \underbrace{\langle \bar{a}, \bar{u} \rangle}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle &= \langle \bar{u}, \bar{c} \rangle - \frac{\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle}{|\bar{a}|^2} \underbrace{\langle \bar{a}, \bar{u} \rangle}_{=0} - \frac{\langle \bar{u}, \bar{c} \rangle}{|\bar{u}|^2} |\bar{u}|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$B' = \{\bar{a}, \bar{u}, \bar{c}\} \xrightarrow{S_2} \{\bar{a}, \bar{u}, \bar{v}\}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle}{|\bar{a}|^2} \\ 0 & 1 & -\frac{\langle \bar{u}, \bar{c} \rangle}{|\bar{u}|^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_2 \in O(3) \Rightarrow \det S_2 = 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B'' = \{\bar{a}, \bar{u}, \bar{v}\} \text{ bază la fel orientată cu } B'$$

Deci, $B'' = \{\bar{a}, \bar{u}, \bar{v}\}$ este o bază ortogonală la fel orientată cu baza inițială.

3) Pentru a obține o bază ortonormată vom normaliza vectorii din B'' și vom considera $B''' = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$, unde

$$\bar{x} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} ; \bar{y} = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} ; \bar{z} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}.$$

$$B'' = \{\bar{a}, \bar{u}, \bar{v}\} \xrightarrow{S_3} B''' = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{|\bar{a}|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|\bar{u}|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{|\bar{v}|} \end{pmatrix} \quad S_3 \in O(3) \Rightarrow \det S_3 = \frac{1}{|\bar{a}| |\bar{u}| |\bar{v}|} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B''' = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\} \text{ bază la fel orientată cu } B''$$

$$B \xrightarrow{S_1} B' \xrightarrow{S_2} B'' \xrightarrow{S_3} B'''$$

$$S = S_1 S_2 S_3$$

"

$$\det S = \underbrace{\det S_1}_{>0} \cdot \underbrace{\det S_2}_{>0} \cdot \underbrace{\det S_3}_{>0} > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow B'''$ este o bază ortonomată la fel orientată
cu baza inițială.

Schimbări de bază ortonormate în $(V_3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ b.o.p. și $B' = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ b.ortonormată din V_3 .

$$\underline{M_{B,B'}} = ?$$

Ⓘ $\vec{k} = \vec{k}'$
 $\{\vec{i}, \vec{j}\} \mapsto \{\vec{i}', \vec{j}'\}$

$$\rightarrow M_{B,B'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \angle(\vec{i}, \vec{i}'), \quad M_{B,B'} \in O(3)$$

$\det M_{B,B'} = 1.$

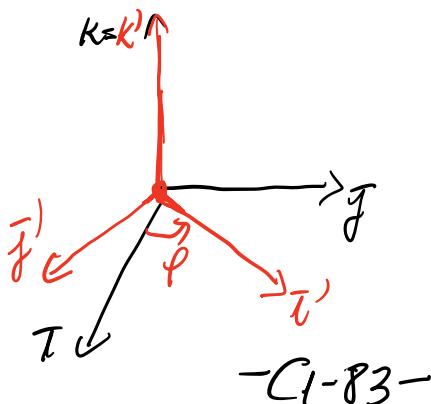
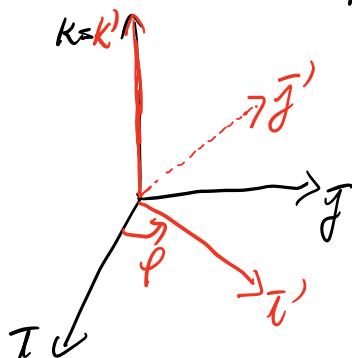
schimbare de tipul I / rotație de unghi φ

Ⓢau

$$\rightarrow M_{B,B'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \angle(\vec{i}, \vec{i}'), \quad M_{B,B'} \in O(3)$$

$\det M_{B,B'} = -1.$

schimbare de tipul II



Ⓘ p. $\underline{\bar{K}'} = -\underline{\bar{K}}$
 $\{\underline{i}, \underline{j}\} \mapsto \{\underline{i}', \underline{j}'\}.$

$$\leadsto M_{B,B'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B,B'} \in O(3)$$

$$\det M_{B,B'} = 1.$$

$\leadsto$ schimbare de tipul II

Ⓢau

$$\leadsto M_{B,B'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B,B'} \in O(3)$$

$$\det M_{B,B'} = 1.$$

$\leadsto$ schimbare de tipul I /
 rotație de unghi φ .

Ⓜ p. $\underline{\bar{K}'} \neq \pm \underline{\bar{K}}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } \{\underline{i}, \underline{j}\} \perp \underline{\bar{K}} \\ \{\underline{i}', \underline{j}'\} \perp \underline{\bar{K}'} \\ \underline{\bar{K}} \times \underline{\bar{K}'} \neq \underline{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{\bar{K}} \times \underline{\bar{K}'} \in [\underline{i}, \underline{j}] \\ \underline{\bar{K}} \times \underline{\bar{K}'} \in [\underline{i}', \underline{j}'] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Considerăm $\underline{i}, \underline{j}, \underline{\bar{K}}, \underline{i}', \underline{j}', \underline{\bar{K}'}$ aplicați în O

$\Rightarrow$ planul det. de O și $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ și cel det. de O și $\{\underline{i}', \underline{j}'\}$ se intersectează după o dreaptă, numită linia modurilor, pe care o not. cu (d) . Evident $(d) \parallel \underline{\bar{K}} \times \underline{\bar{K}'}$

▢ Fie $\underline{\bar{\theta}} = \mp(\underline{\bar{K}}, \underline{\bar{K}'})_0 \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$. Considerăm vect. unitar

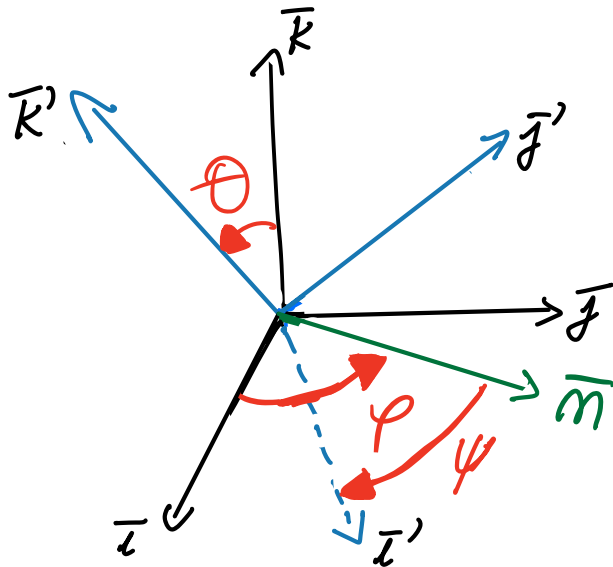
$\underline{\bar{m}} = \frac{\underline{\bar{K}} \times \underline{\bar{K}'}}{\|\underline{\bar{K}} \times \underline{\bar{K}'}\|}$ vect. unitar care ne dă direcția dreptei (d) .

- C1-84 -

□ Für $\varphi = \angle(\vec{i}, \vec{m})_O$, $\psi = \angle(\vec{m}, \vec{i}')_O$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{m} \in [\vec{i}, \vec{j}] \\ |\vec{m}| = 1 \\ \{\vec{i}, \vec{j}\} \text{ b.o.p. } \vec{m} \in [\vec{i}, \vec{j}] \\ \varphi = \angle(\vec{i}, \vec{m})_O \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{observable}} \underline{\vec{m} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{m} \in [\vec{i}', \vec{j}'] \\ |\vec{m}| = 1 \\ \{\vec{i}', \vec{j}'\} \text{ b.o.p. } \vec{m} \in [\vec{i}', \vec{j}'] \\ -\psi = \angle(\vec{i}', \vec{m})_O \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{observable}} \begin{array}{l} \vec{m} = \cos(-\psi) \vec{i}' + \sin(-\psi) \vec{j}' \\ \textcircled{1} \\ \underline{\vec{m} = \cos \psi \vec{i}' - \sin \psi \vec{j}'} \end{array}$$



Gum $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ b.o.p. în $V_3 \Rightarrow$

$$\bar{k}' = s_3^1 \bar{i} + s_3^2 \bar{j} + s_3^3 \bar{k}.$$

Deci să det. $\underline{s_3^l}, l=1,2,3.$

Gum $\bar{m} = \frac{\bar{k} \times \bar{k}'}{\sin \theta}$ și $\bar{m} = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}$, rezultă că

$$\sin \theta (\cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & 0 & s_3^1 \\ \bar{j} & 0 & s_3^2 \\ \bar{k} & 1 & s_3^3 \end{vmatrix} = -s_3^2 \bar{i} + s_3^1 \bar{j} \Rightarrow \begin{cases} s_3^2 = -\cos \varphi \sin \theta \\ s_3^1 = \sin \varphi \sin \theta \end{cases}$$

$$\theta = \angle(\bar{k}, \bar{k}') \Rightarrow \cos \theta = \frac{\langle \bar{k}, \bar{k}' \rangle}{|\bar{k}| |\bar{k}'|} \Leftrightarrow s_3^3 = \cos \theta$$

Deci $\bar{k}' = \sin \varphi \sin \theta \bar{i} - \cos \varphi \sin \theta \bar{j} + \cos \theta \bar{k}.$

Sărim că $\bar{k}' \perp [\bar{i}', \bar{j}']$ și $\bar{k}' \perp \bar{k}' \times \bar{m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{k}' \times \bar{m} \in [\bar{i}', \bar{j}'] \Rightarrow [\bar{m}, \bar{k}' \times \bar{m}] = [\bar{i}', \bar{j}']$$

În plus, $\bar{m} \in [\bar{i}', \bar{j}']$

$$|\bar{k}' \times \bar{m}| = \sin \angle(\bar{k}', \bar{m}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\bar{m} = \frac{\bar{k}' \times \bar{k}'}{\sin \theta} \Rightarrow \bar{k}' \perp \bar{m}$$

$$\odot \quad \underline{\bar{k}' \times \bar{m}} = ?$$

$$\bar{k}' \times \bar{m} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \\ \bar{j} & -\cos \psi \sin \theta & \sin \psi \\ \bar{k} & \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\sin \psi \cos \theta \bar{i} + \cos \psi \cos \theta \bar{j} + \sin \theta \bar{k}$$

Reamintim că $\psi = \angle(\bar{m}, \bar{i})_\theta$

I $\odot$ Dacă $\{\bar{m}, \bar{k}' \times \bar{m}\} \text{ și } \{\bar{i}', \bar{j}'\}$ două baze ortonomate la fel
orientate $\widehat{m}[\bar{i}', \bar{j}'] = [\bar{m}, \bar{k}' \times \bar{m}]$:

$$\begin{cases} \bar{i}' = \cos \psi \bar{m} + \sin \psi \bar{k}' \times \bar{m} \\ \bar{j}' = -\sin \psi \bar{m} + \cos \psi \bar{k}' \times \bar{m} \end{cases}$$

Deci,

$$\begin{cases} \bar{i}' = (\cos \psi \cos \psi - \sin \psi \cos \theta \sin \psi) \bar{i} + (\sin \psi \cos \psi + \cos \psi \cos \theta \sin \psi) \bar{j} + \sin \theta \sin \psi \cdot \bar{k} \\ \bar{j}' = (\cos \psi \sin \psi - \sin \psi \cos \theta \cos \psi) \bar{i} + (-\sin \psi \sin \psi + \cos \psi \cos \theta \cos \psi) \bar{j} + \sin \theta \cos \psi \cdot \bar{k} \end{cases}$$

II $\odot$ Dacă $\{\bar{m}, \bar{k}' \times \bar{m}\} \text{ și } \{\bar{i}', \bar{j}'\}$ două baze ortonomate contrar
orientate $\widehat{m}[\bar{i}', \bar{j}'] = [\bar{m}, \bar{k}' \times \bar{m}]$:

$$\begin{cases} \bar{i}' = \cos \psi \bar{m} + \sin \psi \bar{k}' \times \bar{m} \\ \bar{j}' = \sin \psi \bar{m} - \cos \psi \bar{k}' \times \bar{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{i}' = (\cos \psi \cos \psi - \sin \psi \cos \theta \sin \psi) \bar{i} + (\sin \psi \cos \psi + \cos \psi \cos \theta \sin \psi) \bar{j} + \sin \theta \sin \psi \cdot \bar{k} \\ \bar{j}' = (\cos \psi \sin \psi + \sin \psi \cos \theta \cos \psi) \bar{i} + (\sin \psi \sin \psi - \cos \psi \cos \theta \cos \psi) \bar{j} - \sin \theta \cos \psi \cdot \bar{k} \end{cases}$$

Deci, în cazul I:

$$M_{B,B'} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \cos\theta \sin\psi & -\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\theta \cos\psi & \sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \cos\theta \sin\psi & -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\theta \cos\psi & -\cos\varphi \sin\theta \\ \sin\theta \sin\psi & \sin\theta \cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{\det M_{B,B'} = 1}$$

În cazul II:

$$M_{B,B'} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \cos\theta \sin\psi & \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\theta \cos\psi & \sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \cos\theta \sin\psi & \sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\theta \cos\psi & -\cos\varphi \sin\theta \\ \sin\theta \sin\psi & -\sin\theta \cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{\det M_{B,B'} = -1}$$

φ, ψ, θ s.m. unghiurile lui Euler

Observație. Matricea schimbării de bază ortonomată la fel orientate în V_3 se obține prin compunerea a 3 rotații:

- $R_{\bar{K}, \varphi}$ = rotație în jurul lui $\bar{K}$ de unghi φ
- $R_{\bar{M}, \theta}$ = rotație în jurul lui $\bar{M}$ de unghi θ
- $R_{\bar{K}', \psi}$ = rotație în jurul lui $\bar{K}'$ de unghi ψ

$$B = \{\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}\} \xrightarrow{R_{\bar{K}, \varphi}} B_1 = \underbrace{\{\bar{I}_1, \bar{J}_1, \bar{K}\}}_{\bar{M}} \xrightarrow{R_{\bar{M}, \theta}} B_2 = \underbrace{\{\bar{M}, \bar{J}_2, \bar{K}_2\}}_{\bar{K}'} \xrightarrow{R_{\bar{K}', \psi}} B' = \{\bar{I}', \bar{J}', \bar{K}'\}$$

$$M_{B, B'} = M_{B, B_1} \cdot M_{B_1, B_2} \cdot M_{B_2, B'}$$

$$M_{B, B_1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_{B_1, B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \quad M_{B_2, B'} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$